

Anfangsdaten für Schwarze Löcher auf hyperboloidalen Blättern

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)



seit 1558

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen Fakultät
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Diplom-Physiker David Schinkel
geboren am 21.09.1985 in Dresden

Gutachter

1. Prof. Dr. Marcus Ansorg
Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena
2. Dr. Juan A. Valiente Kroon
School of Mathematical Sciences
Queen Mary University of London
3. PD Dr. Oliver Rinne
Geometrische Analysis und Gravitation
Max-Planck- Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut)

Tag der Disputation: 5. Januar 2016

Für Lisa



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
1.1. Das hyperboloidale Anfangsdatenproblem	9
1.1.1. Die 3+1 Zerlegung	9
1.1.2. Hyperboloidale Blätter	11
1.1.3. Konforme Kompaktifizierung	14
1.1.4. Hyperboloidale Zwangsbedingungen	15
1.1.5. Regularität der Zwangsbedingungen	19
1.2. Marginal gefangene Flächen	21
1.3. Numerische Methoden	25
1.3.1. Pseudospektrale Methoden	25
1.3.2. Newton-Raphson-Verfahren	28
1.3.3. Horizontfinder	29
2. Die ACMC-Blätterung	31
2.1. Hyperboloidale Blätter für ein Kerrsches Schwarzes Loch	32
2.2. Diskussion der Regularitätsbedingung auf hyperboloidalen Blättern für ein Kerrsches Schwarzes Loch	34
2.3. Hyperboloidale ACMC-Blätter für ein Kerrsches Schwarzes Loch	35
2.4. Anfangsdaten für ein gestörtes Kerrsches Schwarzes Loch	38
2.5. Numerische Ergebnisse	42
2.6. Diskussion der Anfangsdaten	45
2.6.1. Marginal gefangene Flächen	45
2.6.2. Analyse der Multipole	51
2.6.3. Bondi-Masse	55
2.6.4. Ungleichungen für gestörte Schwarze Löcher	59

3. Die CMC-Blätterung	63
3.1. Stationäre Schwarze Löcher auf einer CMC-Blätterung	64
3.1.1. Hyperboloidale CMC-Blätter	65
3.1.2. Numerische Ergebnisse	72
3.2. Anfangsdaten für ein binäres System	77
3.2.1. Hyperboloidale konform flache CMC-Blätter	78
3.2.2. Anfangsdaten für zwei Schwarze Löcher	79
3.2.3. Numerische Ergebnisse	86
3.2.4. Horizontfinder für Binärsysteme	87
3.2.5. Physikalische Eigenschaften der Anfangsdaten	89
3.2.6. Diskussion der Anfangsdaten	90
4. Zusammenfassung	99
5. Literatur	101
A. Danksagung	113
B. Lebenslauf	115
C. Ehrenwörtliche Erklärung	117

1. Einleitung

Die Frage, welche Mechanismen das Universum auf großen Skalen bewegen, ist eine der Fragen, auf welche die Menschheit seit jeher eine Antwort sucht. Eng verbunden mit dieser Fragestellung ist die Frage nach der Konzeption von Raum und Zeit. In den letzten Jahrtausenden gab es eine Vielzahl von Modellen, zum Teil auf Beobachtungen gestützt, oder eher theoretischer Natur. Aus dieser Vielzahl an Arbeiten, auf die hier nicht im Einzelnen eingegangen werden soll, kristallisierte sich zum Ende des 17. Jahrhunderts die Newtonsche Mechanik heraus. Sowohl die Mechanik der Himmelskörper als auch die irdische Mechanik wurde auf ein solides mathematisches Fundament gesetzt. Die darin enthaltenen Konzepte von Raum und Zeit prägten maßgeblich die Naturwissenschaften. Erst gute zwei Jahrhunderte später revolutionierte EINSTEIN mit der speziellen [\[1\]](#) und allgemeinen Relativitätstheorie [\[2\]](#) das Verständnis der Konzepte von Raum und Zeit und bettete die Gravitation darin ein. Die Arbeiten von NEWTON zeigten sich als Grenzfall für schwache Gravitationskräfte und kleine Geschwindigkeiten.

Erste Arbeiten zur allgemeinen Relativitätstheorie betrachteten symmetrische Systeme analytisch oder schwache Felder in der Post-Newtonschen Näherung. Mit der fortschreitenden Entwicklung der Computertechnik im 20. Jahrhundert entwickelten sich auch vermehrt numerische Methoden und Konzepte zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen. Ein Ziel der numerischen Relativitätstheorie ist die Simulation von Gravitationswellen, welche z. B. beim Zweikörperproblem entstehen. Der indirekte Nachweis der Gravitationswellen gelang HULSE und TAYLOR mit dem 1974 entdeckten Pulsar PSR 1513-10 [\[3\]](#), der direkte Nachweis steht noch aus. Für den direkten Nachweis mittels erdgebundener Gravitationswellendetektoren [\[4\]](#) bzw. dem geplanten Weltraumdetektor LISA

¹Zurzeit besteht ein Netz aus den Detektoren Virgo, Ligo, TAMA, KAGRA und GEO600 [\[4\]](#).

sind numerische Simulationen notwendig, um die experimentell gewonnenen Daten physikalisch interpretieren zu können.

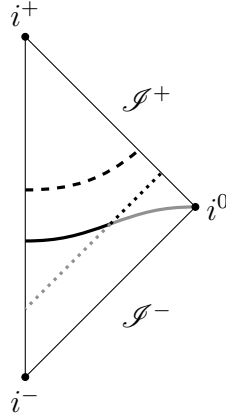


Abbildung 1.1.: Carter-Penrose-Diagramm der Minkowskiraumzeit. Die durchgezogene Linie ist ein Cauchyblatt, welches asymptotisch nach räumlich Unendlich i^0 geht. Die gepunktete Linie ist eine lichtartige Blätterung, welche asymptotisch nach lichtartig Unendlich läuft. Die schwarz/grau Farbcodierung zeigt eine mögliche Kombination der raumartigen und lichtartigen Hyperfläche für das „Cauchy-Characteristic-Matching“. Die gestrichelte Linie ist eine hyperboloidale Blätterung, welche sich als raumartige Blätterung bis \mathcal{J}^+ erstreckt.

Für die Berechnung der erzeugten Gravitationswellen werden die Einsteinschen Feldgleichungen als Anfangswertproblem formuliert, d. h. es werden Daten auf einem Anfangsblatt vorgegeben, welche definierte Zwangsbedingungen erfüllen müssen, und dann mittels Evolutionsgleichungen entwickelt. Je nach Wahl des Anfangsblattes ergeben sich unterschiedliche Problemstellungen, in Abbildung [1.1](#) sind mögliche Blätter in einem konformen Diagramm der Minkowskiraumzeit skizziert. Die i^\pm kennzeichnen für feste Raumkoordinaten den Grenzwert $t \rightarrow \infty$, zeitlich Unendlich. Räumlich Unendlich, als i^0 bezeichnet, wird für feste Koordinatenzeit t im Limes $r \rightarrow \infty$ erreicht. Die durch feste Koordinatenzeit t beschriebenen raumartigen Blätter werden als Cauchy-Blätter bezeichnet. Auslaufende Nullgeodäten erreichen asymptotisch das als \mathcal{J}^+ bezeichnete zukünftige lichtartige Unendlich (future null infinity). Analog dazu ist der Ursprung einlaufender Nullgeodäten, \mathcal{J}^- , das vergangene lichtartige Unendlich (past null infinity). Die durch die Nullgeodäten aufgespannten Blätter heißen charakteristische Blätterung.

Die meisten Verfahren der numerischen Relativitätstheorie arbeiten auf einer Cauchy-Blätterung, welche sich nach i^0 erstreckt und bei endlichem Abstand mit einem künstlichem Rand begrenzt wird. Da die Gravitationswellen erst bei \mathcal{I}^+ wohldefiniert sind, kann bei hinreichend hohem endlichen Abstand nur eine Näherung des Signals extrahiert werden [5]. Einen anderen Ansatz bietet das „Cauchy-Characteristic-Matching“, bei dem eine raumartige Blätterung und eine lichtartige Blätterung, welche sich bis nach \mathcal{I}^+ erstreckt, kombiniert werden. Beide Gebiete werden gleichzeitig evolviert und das Gravitationswellensignal kann direkt bei \mathcal{I}^+ analysiert werden. Eine Übersicht bietet z. B. [6]. Eine vielversprechende Alternative ist die Arbeit auf sogenannten hyperboloidalen Blättern. Dies sind raumartige Blätter die sich bis \mathcal{I}^+ erstrecken. Eine Übersicht dieser Methode bietet z. B. [7]. Eine solche Formulierung erlaubt die Analyse der auslaufenden Gravitationswellen mittels der „Bondi news function“ direkt bei \mathcal{I}^+ [8, 9].

Auf kompaktifizierten hyperboloidalen Blättern wird die physikalische Metrik bei \mathcal{I}^+ singular. Dieses singuläre Verhalten kann durch eine konforme Zerlegung der Metrik in eine reguläre konforme Metrik und einen konformen Faktor, welcher die singuläre Struktur absorbiert, aufgefangen werden. Ein zu den Einsteingleichungen äquivalentes hyperbolisches System für die konforme Metrik wurde von FRIEDRICH [10] aufgestellt, dieses System ist bei \mathcal{I}^+ regulär. Erste numerische Arbeiten für schwache Felder wurden von HÜBNER [11] vorgestellt.

MONCRIEF und RINNE [12] zeigten, dass sich die scheinbar singulären Terme bei \mathcal{I}^+ explizit durch reguläre konforme Daten bestimmen lassen. Damit erhielten sie eine robuste, eichfixierte Formulierung der Feldgleichungen. Erste numerische Ergebnisse dieser Konzepte wurden von RINNE [13] publiziert. Dabei handelte es sich um über lange Zeiten stabile und konvergente Evolutionen axialsymmetrisch gestörter Schwarzschildlösungen.

Für die numerische Evolution der Raumzeit werden Anfangsdaten benötigt. Anfangsdaten sind Lösungen des gekoppelten Differentialgleichungssystems der Zwangsbedingungen, bestehend aus Hamilton- und Vektorzwangsbedingung. Das System der Differentialgleichungen ist bei \mathcal{I}^+ singular. Von ANDERSSON, CHRUŚCIEL und FRIEDRICH [14–16] wurden Bedingungen an die Regularität von Lösungen gefunden. Eine geometrische Bedingung an die Gültigkeit der Regularitätssätze ist die Forderung konstanter mittlerer Krümmung (CMC, constant mean curvature) der hyperboloidalen Blätterung. Im

Kontext dieser Bedingungen wurden von FRAUENDIENER [17] und BUCHMAN et al. [18] Anfangsdaten konstruiert.

Vor Kurzem wurde in [19] ein auf allen Achsen pseudospektraler Algorithmus vorgestellt um axialsymmetrische hyperboloidale Differentialgleichungen zu lösen. Bisher wurde mit diesem Verfahren die Wellengleichung auf hyperboloidalen Schwarzschildblättern gelöst und mit Lösungen aus der Literatur verglichen. Diese Methode kann jedoch auch zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen in der 3+1-Zerlegung angewandt werden. Die Implementierung der notwendigen Gleichungen ist zurzeit der aktuelle Stand der Forschung.

Die vorliegende Arbeit verfolgt zwei Pfade, einerseits wird die CMC-Bedingung dergestalt abgeschwächt, dass Anfangsdaten mit asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung (ACMC, asymptotically constant mean curvature) konstruiert werden. Die Bedingungen für die Regularität der Lösungen werden vom CMC-Fall übernommen und ihre Gültigkeit für den ACMC-Fall vermutet. Die numerischen Ergebnisse unterstützen die Gültigkeit der Vermutung. Die physikalischen Eigenschaften dieser Daten werden ausführlich diskutiert. Andererseits werden die existierenden CMC-Blätterungen um Kerr-Newman-Schwarze Löcher erweitert. Dies ermöglicht in einem weiteren Schritt die Konstruktion von Anfangsdaten für gestörte rotierende Schwarze Löcher im Rahmen der bewiesenen Regularitätsbedingungen auf CMC-Blättern. Im letzten Teil der Arbeit werden auf CMC-Blättern Anfangsdaten für ein axialsymmetrisches Binärsystem Schwarzer Löcher konstruiert. Diese konform flachen Daten sind eine Rekonstruktion der Arbeit von BUCHMAN et al. [18]. Die in den Daten enthaltenen Horizonte werden untersucht, sowie physikalische Eigenschaften diskutiert.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 1 werden allgemeine Grundlagen skizziert und Konventionen eingeführt. Insbesondere wird in Abschnitt 1.1 das hyperboloidale Anfangsdatenproblem erläutert. Dafür wird zuerst in Abschnitt 1.1.1 die 3+1-Zerlegung der Raumzeit und die Herkunft der Zwangsbedingungen erklärt. In den beiden folgenden Abschnitten 1.1.2 und 1.1.3 werden konform kompaktifizierte hyperboloidale Blätter konstruiert. Dafür wird zuerst eine hyperboloidale Blätterung eingeführt, auf der eine räumliche Kompaktifizierung durchgeführt werden kann. Die in Abschnitt 1.1.1 eingeführten Zwangsbedingungen werden in Abschnitt 1.1.4 auf den hyperboloidalen Blättern

formuliert. Da die konformen Zwangsbedingungen singular sind, werden in Abschnitt [1.1.5](#) die Regularitätsbedingungen diskutiert. Das Ergebnis dieser Diskussion führt zu den zwei Hauptkapiteln dieser Arbeit, Blätterungen mit asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung in Kapitel [2](#) und Blätterungen mit konstanter mittlerer Krümmung in Kapitel [3](#). Für die physikalische Diskussion der konstruierten Anfangsdaten wird die Notation von Horizonten auf den dreidimensionalen Blättern benötigt, diese sogenannten marginal gefangenen Flächen werden in Abschnitt [1.2](#) eingeführt. Neben dem scheinbaren Horizont als äußerste marginal auswärts gefangene Fläche legen wir ein besonderes Augenmerk auf marginal inwärts gefangene Flächen, welche, wie wir argumentieren werden, Weiße Löcher beschreiben und Klassen von Anfangsdaten ausschließen. Im letzten Einleitungsabschnitt [1.3](#) werden die verwendeten numerischen Methoden vorgestellt. Insbesondere wird kurz angerissen, wie die auftretenden Differentialgleichungen mittels pseudospektraler Methoden hochpräzise gelöst werden. Außerdem wird ein Verfahren zum Finden der marginal gefangenen Flächen vorgestellt.

Im ersten Hauptabschnitt dieser Arbeit, Kapitel [2](#), werden Anfangsdaten für einzelne gestörte Kerrsche Schwarze Löcher auf hyperboloidalen Blättern mit asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung konstruiert. In den Abschnitten [2.1](#) - [2.3](#) werden die entsprechenden hyperboloidalen Blätter konstruiert. In Abschnitt [2.4](#) wird das Differentialgleichungssystem der Zwangsbedingungen für die numerische Lösung aufbereitet. In den Abschnitten [2.5](#) und [2.6](#) werden die numerischen Ergebnisse vorgestellt und ihre physikalischen Eigenschaften diskutiert. Dabei werden marginal gefangene Flächen in den Daten gesucht. Mittels einer Multipolanalyse des scheinbaren Horizontes wird nachgewiesen, dass es sich tatsächlich um gestörte Kerrsche Schwarze Löcher handelt. Zum Ende werden Aussagen zum Gravitationskollaps überprüft und eine neue Ungleichung für Schwarze Löcher auf hyperboloidalen Blättern vorgestellt.

Der zweite Hauptabschnitt, Kapitel [3](#), beschäftigt sich mit der CMC-Blätterung. Im ersten Teil werden Blätter mit konstanter mittlerer Krümmung für die Kerr-Newman-Familie von Schwarzen Löchern konstruiert. Dazu wird in Abschnitt [3.1.1](#) eine Koordinatentransformation vorgestellt, welche die Kerr-Newman-Lösungen auf Cauchyblättern in Kerr-Koordinaten auf allgemeine kompaktifizierte hyperboloidale Blätter transformiert. In einem zweiten Schritt wird eine Differentialgleichung konstruiert, deren Lösung Blätter mit

konstanter mittlerer Krümmung erzeugt. In Abschnitt [3.1.2](#) werden die numerischen Lösungen dieser Differentialgleichung vorgestellt und diskutiert. Im zweiten Teil des zweiten Hauptabschnittes werden Anfangsdaten für ein Binärsystem erstellt, diese Arbeit rekonstruiert die Daten von BUCHMAN et. al [\[18\]](#). Im Anschluss an die Konstruktion der Daten in den Abschnitten [3.2.1](#) - [3.2.3](#) wird in Abschnitt [3.2.4](#) der Horizontfinder aus Abschnitt [1.3.3](#) für das Binärsystem erweitert. Die Daten werden in den Abschnitten [3.2.5](#) - [3.2.6](#) unter Berücksichtigung der Resultate des Horizontfinders diskutiert.

In den Einleitungskapiteln werden die für diese Arbeit notwendigen Gleichungen und Konzepte kurz angerissen, um Konventionen und Symboliken zu verdeutlichen. Eine umfangreiche Diskussion der Allgemeinen Relativitätstheorie und insbesondere der 3+1-Zerlegung bieten die gängigen Lehrbücher² und Übersichtsartikel.

In der vorliegenden Arbeit werden die folgenden Konventionen verwendet: Griechische Indizes laufen von 0-3, wobei der Index 0 die Zeitkomponente darstellt. Kleine lateinische Indizes laufen von 1 bis 3 und stehen für räumliche Komponenten. Konforme (unphysikalische) Objekte werden mit einer Tilde gekennzeichnet. Wir verwenden Einheiten, in denen sowohl die Lichtgeschwindigkeit c als auch die Newtonsche Gravitationskonstante G identisch eins sind.

²z. B. MISNER, THORNE, WHEELER [\[20\]](#), WALD [\[21\]](#), CARROLL [\[22\]](#), POISSON [\[23\]](#), BAUMGARTE, SHAPIRO [\[24\]](#), ALCUBIERRE [\[25\]](#)

1.1. Das hyperboloidale Anfangsdatenproblem

1.1.1. Die 3+1 Zerlegung

Ein Kernpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Einheit von Raum und Zeit. Dies manifestiert sich in den vierdimensionalen Einsteinschen Feldgleichungen.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Viele analytisch bekannte astrophysikalische Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen wurden im Kontext der vierdimensionalen Raumzeit gefunden (siehe z. B. SCHWARZSCHILD [26], REISSNER [27], NORDSTRÖM [28], KERR [29], NEWMAN [30, 31], FRIEDMAN, LEMAÎTRE, ROBERTSON, WALKER [32–36], NEUGEBAUER, MEINEL [37]).

Um komplexere astrophysikalische Fragestellungen untersuchen zu können, sind numerische Arbeiten jedoch unerlässlich. Im Rahmen numerischer Fragestellungen wird das Bild der Einheit von Raum und Zeit verlassen, um die Einsteinschen Feldgleichungen als Anfangswertproblem zu formulieren. Dabei werden die Feldgleichungen in ein System aus Zwangsbedingungen, welche auf einem Anfangsblatt erfüllt sein müssen, und Evolutionsgleichungen aufgespalten. Die Lösungen der Zwangsbedingungen heißen Anfangsdaten und werden mittels der Evolutionsgleichungen evolviert. Für die Formulierung als Anfangswertproblem bieten sich zwei Möglichkeiten an. Diese sind die 2+2-Zerlegung, bei der Anfangsdaten auf einem Lichtkegel vorgegeben werden. Diese Methode erlaubt auf natürliche Art und Weise die Analyse von Daten bei \mathcal{I}^+ , die Nullgeodäten bilden jedoch Kaustiken aus, welche numerische Arbeiten erschweren. Eine Übersicht über den Stand der Forschung bietet z. B. [6].

Eine andere Möglichkeit ist die in dieser Arbeit verwendete 3+1-Zerlegung, d. h. die Zerlegung der Raumzeit in eine Folge von raumartigen dreidimensionalen Blättern konstanter Koordinatenzeit. Aufbauend auf der 3+1-Zerlegung wird im Folgenden Abschnitt 1.1.2 beschrieben, wie im Rahmen der 3+1-Zerlegung Daten bei \mathcal{I}^+ untersucht werden können. Die Feldgleichungen lassen sich dann in ein System aus elliptischen Zwangsbedingungen und hyperbolischen Evolutionsgleichungen zerlegen. CHOQUET-BRUHAT [38] zeigte, dass zu diesem Anfangswertproblem auf Cauchy-Flächen eine eindeutige Lösung existiert. Die Arbeiten von LEFLOCH und MA [39] erweitern die Aussagen von Cauchy-Blättern auf

hyperboloidale Blätter. Eine mögliche Form der Zwangsbedingungen und Evolutionsgleichungen sind die üblichen ADM-Gleichungen [40–42]. Die raumartigen Blätter seien durch eine skalare Funktion t , der Koordinatenzeit, charakterisiert, dann ist der Normalenvektor der Blätterung durch

$$\partial_\mu t = -\frac{1}{\alpha} n_\mu \quad (1.1)$$

gegeben. Dies ermöglicht eine Zerlegung des Linienelements in die Struktur

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (1.2)$$

mit der Metrik γ_{ij} der dreidimensionalen Blätter, sowie dem shift β^i und lapse α .³ Für die Beschreibung der Zeitableitungen wird die äußere Krümmung $K_{\mu\nu}$ verwendet. Diese ist als Lie-Ableitung der Metrik entlang des Normalenvektors definiert.⁴

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Die Spur der äußeren Krümmung heißt mittlere Krümmung.

$$\begin{aligned} K &= K_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu n^\mu \end{aligned} \quad (1.4)$$

Mit diesen Ausdrücken folgen die Zwangsbedingungen und Evolutionsgleichungen durch Projektion der Einsteinschen Feldgleichungen auf die Normale und die Blätterung. Da in der folgenden Arbeit Schwarze Löcher, d. h. Vakuumlösungen⁵, diskutiert werden, wird außerdem der Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = 0$$

gesetzt.

³Die deutschen Bezeichnungen wären Verschiebungsvektor (shift) und Intervall (lapse), diese sind jedoch nicht gebräuchlich, deswegen wollen wir bei den gebräuchlicheren englischen Bezeichnungen bleiben.

⁴In dieser Arbeit wird für die äußere Krümmung die Vorzeichenkonvention von WALD [21] verwendet. In dieser Konvention nimmt die mittlere Krümmung K bei \mathcal{S}^+ positive Werte an, im Gegensatz zur ebenfalls verbreiteten Konvention von MISNER, THORNE und WHEELER [20].

⁵In Abschnitt 3.1 wird die Kerr-Newman-Familie betrachtet, für diese ist $T_{\mu\nu} \neq 0$. Für diese Objekte wird eine CMC-Blätterung konstruiert, nicht jedoch das Anfangsdatenproblem gelöst. Anfangsdaten werden in dieser Arbeit nur für Objekte mit $T_{\mu\nu} = 0$ konstruiert.

Die Zwangsbedingungen sind

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla_i(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 0 \quad (1.6)$$

und die Evolutionsgleichungen

$$\partial_t \gamma_{ij} = 2\alpha K_{ij} + \nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i \quad (1.7)$$

$$\partial_t K_{ij} = \alpha (R_{ij} - 2K_{ik}K^k_j + K K_{ij}) - \nabla_i \nabla_j \alpha - \beta^k \partial_k K_{ij} - K_{ik} \partial_j \beta^k - K_{kj} \partial_i \beta^k. \quad (1.8)$$

Die geometrischen Größen R_{ij} , R und ∇_i werden aus der dreidimensionalen Metrik γ_{ij} der Blätter erzeugt. Wenn die Zwangsbedingungen auf einem Anfangsblatt erfüllt sind, so erhalten die Evolutionsgleichungen diese Eigenschaft.

1.1.2. Hyperboloidale Blätter

Die Anfangsdaten, d. h. die Lösungen der Zwangsbedingungen (1.5, 1.6), werden in der numerischen Relativitätstheorie zumeist auf Cauchy-Blättern Σ_t konstruiert und dann mittels der Evolutionsgleichungen (1.7, 1.8) entwickelt. Cauchy-Blätter verlaufen asymptotisch nach räumlich Unendlich (i^0), d. h. eine auslaufende Welle vollzieht auf einem solchen Blatt unendlich viele Schwingungen bis sie i^0 erreicht. Deswegen werden künstliche Ränder eingeführt, innerhalb derer die Gleichungen gelöst werden. Diese künstlichen Randbedingungen erzeugen selbst für einfachste Fragestellungen ungewollte Reflektionen [43] und können die numerische Evolution stark beeinträchtigen [44]. Des Weiteren sind Gravitationswellen und physikalisch interessante Größen wie die Masse⁶ nur im Unendlichen, asymptotisch Flächen wohldefiniert. Eine Lösung bietet die Verwendung hyperboloidaler Blätter Σ_τ , d. h. einer raumartigen Blätterung, welche asymptotisch gegen lichtartig Unendlich (\mathcal{I}^+) geht.

Die Konstruktion hyperboloidaler Blätter ist durch die Einführung einer Höhenfunktion (height-function) [45] möglich, andere Ansätze werden z. B. in [46, 47] diskutiert. Die hyperboloidale Blätterung wird durch eine neue Zeitkoordinate erzeugt, diese ist durch

$$\tau = t + h \quad (1.9)$$

⁶Auf Cauchy Blättern die ADM-Masse, auf hyperboloidalen Blättern die Bondi-Masse.

definiert. Dabei ist h die Höhenfunktion, welche bildlich im Carter-Penrose-Diagramm das Blatt nach \mathscr{J}^+ „hebt“. Die Höhenfunktion erhält man durch asymptotische Integration auslaufender Nullgeodäten.

Das Verfahren der Konstruktion hyperboloidaler Blätter mittels asymptotischer Integration soll im Folgenden anhand der Schwarzschildlösung skizziert werden. In den Schwarzschildkoordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ ist das Linienelement durch

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (1.10)$$

gegeben. Diese Koordinaten sind am Horizont ($r = 2M$) singulär und erreichen für $r \rightarrow \infty$ räumlich Unendlich, i^0 . In Schildkrötenkoordinaten (tortoise coordinates)

$$\hat{r} = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (1.11)$$

wird der Horizont nach $\hat{r} \rightarrow \infty$ verschoben. Im Folgenden sollen darauf basierend Koordinaten eingeführt werden, welche an Nullgeodäten angepasst sind.

$$V = t + \hat{r} \quad (1.12)$$

$$U = t - \hat{r} \quad (1.13)$$

Auf Hyperflächen mit $U = \text{konst.}$ liegen auslaufende Nullgeodäten. Für $r \rightarrow \infty$ schneiden diese Hyperflächen \mathscr{J}^+ und bei $r = 2M$ den Vergangenheits-Horizont (past horizon) des Schwarzen Loches. Flächen mit $V = \text{konst.}$ schneiden für $r = 2M$ den zukünftigen Horizont und für $r \rightarrow \infty$ \mathscr{J}^- und werden durch einlaufende Nullgeodäten beschrieben. Die Metrik ist in den Koordinaten $(U, r, \vartheta, \varphi)$ und $(V, r, \vartheta, \varphi)$ außerhalb der Singularität regulär. Die zu konstruierenden hyperboloidalen Blätter sollen vom Zukunfts-Horizont (future horizon) für $r \rightarrow \infty$ nach \mathscr{J}^+ gehen. Dafür wählen wir die einlaufende Koordinate V , um daraufhin das Verhalten der Blätter mit $V = \text{konst.}$ mittels der Höhenfunktion h bei $r \rightarrow \infty$ zu modifizieren, wobei die Regularität des Linienelements am Horizont erhalten bleiben soll. Abbildung [1.2](#) zeigt schematisch die Schwarzschildlösung in Schwarzschildkoordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ sowie in einlaufenden Eddington-Finkelstein-Koordinaten $(V, r, \vartheta, \varphi)$ und in den gesuchten hyperboloidalen Koordinaten $(\tau, r, \vartheta, \varphi)$. Der Begriff der Höhenfunktion h , welche die Blätter mit $V = \text{konst.}$ von \mathscr{J}^- nach \mathscr{J}^+ „hebt“, wird darin deutlich.

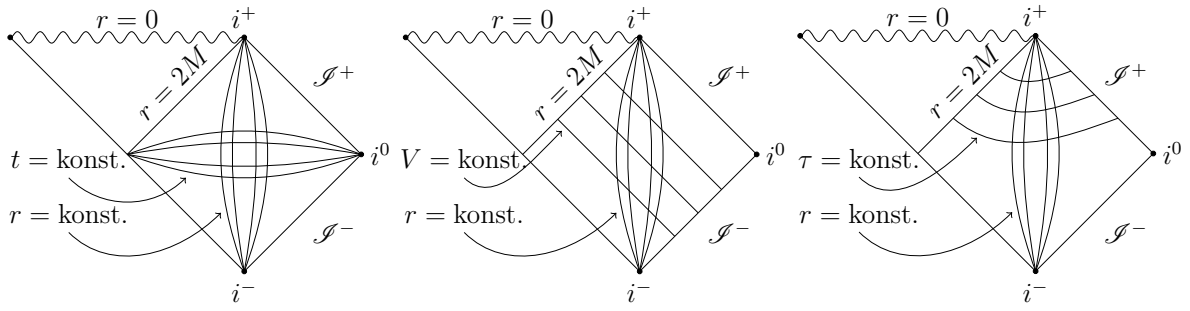


Abbildung 1.2.: Schematische Darstellung der Schwarzschildlösung im Carter-Penrose-Diagramm in Schwarzschildkoordinaten (t, r) (linke Grafik), einlaufenden Eddington-Finkelstein-Koordinaten (V, r) (mittlere Grafik) sowie hyperboloidalen Koordinaten (τ, r) (rechte Grafik). Die Winkelanteile (ϑ, φ) wurden aufgrund der spärischen Symmetrie unterdrückt.

In einlaufenden Eddington-Finkelstein-Koordinaten $(V, r, \vartheta, \varphi)$ ist das Linienelement durch

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dV^2 + 2dVdr + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (1.14)$$

gegeben. Auslaufende Nullgeodäten sind in einlaufenden Eddington-Finkelstein-Koordinaten durch

$$dV = 2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr \quad (1.15)$$

beschrieben. Wird nach einer vollständigen Integration von (1.15) die Integrationskonstante als neue Koordinate eingeführt, ist dies die auslaufende Eddington-Finkelstein-Koordinate U . Eine Reihenentwicklung von (1.15) für $r \rightarrow \infty$ ergibt

$$dV = \left(2 + \frac{4M}{r} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right) dr. \quad (1.16)$$

Im Rahmen der asymptotischen Integration werden die ersten beiden Terme der Reihenentwicklung in (1.16) integriert. Dadurch wird die Blätterung nur bei $r \rightarrow \infty$ verändert und erhält den Schnitt durch den zukünftigen Horizont. Die asymptotische Integration ergibt

$$V = \underbrace{4M\tau + 2r + 4M \log \frac{r}{2M}}_h. \quad (1.17)$$

Die Integrationskonstante τ wird als neue Koordinate eingeführt, Blätter mit $\tau = \text{konst.}$

sind hyperboloidal. In den Koordinaten $(\tau, r, \vartheta, \varphi)$ ist das Linienelement

$$ds^2 = -16M^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 - 8M \left(1 - \frac{8M^2}{r^2}\right) d\tau dr \\ + \frac{16M^2}{r^3} (2M + r) dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Die mittlere Krümmung dieser Blätter ist außerhalb des Ereignishorizontes positiv und endlich.

$$K = \frac{-24M^3 - 8M^2r + 7Mr^2 + r^3}{4M(2Mr + r^2)^{3/2}} \quad (1.18)$$

Eine in (1.9) eingeführte Höhenfunktion ist in Gleichung (1.17) gekennzeichnet. Die Höhenfunktion ist nicht eindeutig, jede Familie von Funktionen mit dem durch die asymptotische Integration geforderten asymptotischen Verhalten ergibt eine hyperboloidale Blätterung. In der vorliegenden Arbeit wird dies verwendet, um durch die Höhenfunktion weitere geometrische Forderungen an die Blätter $\tau = \text{konst.}$ zu realisieren. Durch das Einführen einer regulären Funktion A in der Höhenfunktion nach dem Schema

$$h \rightarrow h + A \quad (1.19)$$

werden Forderungen an die Blätterung zu Bedingungen an A . In Abschnitt 2.1 werden lokale Bedingungen an A formuliert welche zu einer ACMC-Blätterung führen. In Abschnitt 3.1 wird eine globale Bedingung an A gestellt und auf diese Weise werden CMC-Blätter konstruiert.

1.1.3. Konforme Kompaktifizierung

Um die hyperboloidalen Blätter in die Numerik einbinden zu können, ist es sinnvoll, die radiale Koordinate zu kompaktifizieren. Die Kompaktifizierung erzeugt eine bei \mathcal{I}^+ singuläre Metrik, welche in einen konformen Faktor Ω und eine reguläre konforme⁷ Metrik $\tilde{g}_{\mu\nu}$ aufgespalten werden kann [40, 48, 49].

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

⁷Bisweilen auch „unphysikalische“

Für den konformen Faktor Ω gilt $\Omega|_{\mathcal{S}^+} = 0$ und $d\Omega|_{\mathcal{S}^+} \neq 0$. Am Beispiel der in Abschnitt [1.1.2](#) diskutierten Schwarzschildmetrik in Eddington-Finkelstein-Koordinaten ist eine Kompaktifizierung in die dimensionslose Koordinate σ durch

$$r = \frac{2M}{\sigma} \quad (1.21)$$

möglich. Wegen des Horizontes bei $r = 2M$ deckt $\sigma \in [0, 1]$ das gesamte Gebiet außerhalb des Schwarzen Loches ab. Das Linienelement ist

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2 \quad (1.22)$$

mit dem konformen Linienelement in den Koordinaten $(\tau, \sigma, \vartheta, \phi)$

$$d\tilde{s}^2 = \left(-\sigma^2(1-\sigma)d\tau^2 - (2\sigma^2-1)d\tau d\sigma + (1+\sigma)d\sigma^2 + \frac{1}{4}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right),$$

und dem konformen Faktor $\Omega = \frac{\sigma}{4M}$.

1.1.4. Hyperboloidale Zwangsbedingungen

Die im physikalischen Raum formulierten Zwangsbedingungen ([1.5](#), [1.6](#)) der 3+1-Zerlegung sollen mittels der konformen Transformation ([1.20](#)) im konformen Raum formuliert werden. Mit der konformen Metrik der Blätterung

$$\gamma_{ij} = \Omega^{-2} \tilde{\gamma}_{ij} \quad (1.23)$$

folgt für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \Omega^{-1} \left(2\delta_{(j}^i \partial_{k)} \Omega - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{il} \partial_l \Omega \right) \quad (1.24)$$

und den Krümmungsskalar der Blätterung

$$R = \Omega^2 \tilde{R} - 6\tilde{\nabla}_i \Omega \tilde{\nabla}^i \Omega + 4\Omega \tilde{\nabla}^2 \Omega. \quad (1.25)$$

Die äußere Krümmung lässt sich in Spur und spurfreien Anteil zerlegen

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}K, \quad \gamma_{ij}A^{ij} = 0. \quad (1.26)$$

Die konforme Transformation des spurfreien Anteils der äußeren Krümmung ergibt

$$A_{ij} = \Omega^{-1} \tilde{A}_{ij} \quad \text{und} \quad A^{ij} = \Omega^3 \tilde{A}^{ij}. \quad (1.27)$$

Um die Gleichungen zu vereinfachen, setzen wir

$$A^{ij} = \Omega^\alpha \hat{A}^{ij} \quad (1.28)$$

für ein geeignetes, zu bestimmendes, α an. Bei fixiertem α transformiert sich die Divergenz eines symmetrischen spurfreien Tensors A^{ij} nach

$$\nabla_j A^{ij} = \Omega^5 \tilde{\nabla}_j (\Omega^{\alpha-5} \hat{A}^{ij}) . \quad (1.29)$$

Für die Wahl von $\alpha = 5$ folgt somit, dass die Divergenzfreiheit von A^{ij} die Divergenzfreiheit von \hat{A}^{ij} impliziert. Mit dieser Betrachtung definieren wir für den spurfreien Anteil der äußeren Krümmung folgende Transformation

$$A_{ij} = \Omega \hat{A}_{ij} \quad \text{und} \quad A^{ij} = \Omega^5 \hat{A}^{ij} . \quad (1.30)$$

Die Bezeichnungen \hat{A}_{ij} , \hat{A}^{ij} sollen darauf hindeuten, dass es sich *nicht* um die konform transformierten Objekte \tilde{A}_{ij} , \tilde{A}^{ij} handelt. Der Zusammenhang zwischen den Objekten ist durch

$$\hat{A}_{ij} = \Omega^{-2} \tilde{A}_{ij} \quad \text{und} \quad \hat{A}^{ij} = \Omega^2 \tilde{A}^{ij} \quad (1.31)$$

gegeben.

Im Folgenden soll die Eigenschaft $\Omega|_{\mathcal{I}^+} = 0$ der konformen Transformation mit dem LICHNEROWICZ-Ansatz manifestiert werden. Dazu wird Ω in eine \mathcal{I}^+ fixierende Funktion ω und das Potential ϕ aufgespalten (siehe z. B. [\[7\]](#)).

$$\Omega = \omega \phi^n \quad (1.32)$$

Die vorgegebene Funktion ω erbt die asymptotischen Eigenschaften von Ω bei \mathcal{I}^+ , d. h. ω

- ist positiv innerhalb des Blattes und verschwindet bei \mathcal{I}^+ ,
- hat einen nichtverschwindenden Gradienten bei \mathcal{I}^+ .

Das Potential ϕ hängt von der konkreten Wahl von ω ab, jede Kombination (ω, ϕ) führt zum gleichen konformen Faktor Ω .

Die Anwendung der konformen Transformation (1.23), sowie der Gleichungen (1.24, 1.25, 1.30) und der Aufspaltung von Ω (1.32) auf die Hamiltonzwangsbedingung (1.5) ergibt

$$4n \left(-\omega^2 \tilde{\nabla}^2 \phi + \omega \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \phi \right) \phi^{2n-1} + 2\omega^2 (n^2 + 2n) \phi^{2n-2} \tilde{\nabla}_i \phi \tilde{\nabla}^i \phi - \left(\omega^2 \tilde{R} + 4\omega \nabla^2 \omega - 6 \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega \right) \phi^{2n} - \frac{2}{3} K^2 + \omega^6 \phi^{6n} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} = 0. \quad (1.33)$$

Bei der Wahl von $n = -2$ verschwindet in (1.33) der Term $\propto \tilde{\nabla}_i \phi \tilde{\nabla}^i \phi$, damit folgt die konforme Hamiltonzwangsbedingung

$$8\omega^2 \tilde{\nabla}^2 \phi - 8\omega \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \phi - (\omega^2 \tilde{R} + 4\omega \nabla^2 \omega - 6 \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega) \phi = \frac{2}{3} K^2 \phi^5 - \omega^6 \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \phi^{-7}. \quad (1.34)$$

Für den Fall isotroper äußerer Krümmung, d. h. $K_{ij} = \frac{1}{3} \gamma_{ij} K$ und $K = \text{konst.}$ sind die $A_{ij} = 0$ und die konforme Hamiltonzwangsbedingung (1.34) wird zur Yamabe-Gleichung. Dieser Fall wurde z. B. in [11, 17] studiert.

Mit dem Reihenansatz

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \omega + \phi_2 \omega^2 + o(\omega^2) \quad (1.35)$$

und unter der Annahme der Regularität der $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ lassen sich diese Koeffizienten bestimmen. Der erste Koeffizient ist

$$\phi_0 = \sqrt[4]{9 \frac{\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega}{K^2}} \Big|_{\mathcal{J}^+}. \quad (1.36)$$

Für Koeffizienten höherer Ordnung ist dies nicht a priori möglich. Es ergeben sich Beziehungen zwischen ϕ_3 und höheren Koeffizienten. Dieses Verhalten ist für den Fall der Yamabe-Gleichung typisch, deswegen wollen wir diese konforme Hamiltonzwangsbedingung als Yamabe-artig bezeichnen. Eine andere Wahl der Transformation zwischen den A^{ij} und \hat{A}^{ij} (1.30) kann diese Struktur zerstören, insbesondere ist dies für die Transformation gemäß Gleichung (1.27) der Fall. Die Yamabe-artige Struktur erlaubt das Setzen einer inneren Randbedingung. Im Folgenden werden marginal gefangene Flächen als innere Randbedingung vorgeschrieben (siehe Abschnitt 1.2), während am äußeren Rand (\mathcal{J}^+) die Dirichlet-Bedingung aus Gleichung (1.36) gegeben ist.

Die analoge Anwendung der Gleichungen (1.23, 1.30, 1.32) auf die Vektorzwangsbedingung (1.6) ergibt

$$\tilde{\nabla}_j \hat{A}^{ij} - \frac{2}{3} \frac{\phi^6}{\omega^3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{\nabla}_j K = 0. \quad (1.37)$$

Grundlage für die Lösung der Zwangsbedingungen ist die von YORK vorgeschlagene Aufspaltung der äußeren Krümmung und die darauf aufbauende Aufspaltung des spurfreien Anteils [50–53] (für eine Übersicht siehe z. B. [54]).

Mit

$$(\tilde{\mathcal{L}}V)^{ij} = \tilde{\nabla}^{(i}V^{j)} - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{\nabla}_k V^k \quad (1.38)$$

definieren wir die folgende Aufspaltung des spurfreien Anteils der äußeren Krümmung

$$\hat{A}^{ij} = (\tilde{\mathcal{L}}V)^{ij} + M^{ij}, \quad (1.39)$$

mit dem spurfreien, symmetrischen Tensor M^{ij} . Diese Zerlegung ist als konform transversal spurfreie Aufspaltung (CTT, conformal transverse traceless) bekannt.⁸ Diese Aufspaltung ist immer möglich, da die triviale Wahl $V^i = 0$ und $M^{ij} = \hat{A}^{ij}$ die Zerlegung (1.39) erfüllt.

Das Paar (M^{ij}, V^i) ist nicht eindeutig, es existieren zwei unterschiedliche Sätze $\{^1M^{ij}, ^1V^i\}$ und $\{^2M^{ij}, ^2V^i\}$, welche durch das Vektorfeld W^i über

$$^1M^{ij} - ^2M^{ij} = (\tilde{\mathcal{L}}W)^{ij} \quad \text{und} \quad ^1V^i - ^2V^i = -W^i \quad (1.40)$$

verknüpft sind, und zur gleichen äußeren Krümmung K_{ij} führen.

Mit

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}}V^i = \tilde{\nabla}_j(\tilde{\mathcal{L}}V)^{ij} \quad (1.41)$$

ergibt sich die konforme Vektorzwangsbedingung aus (1.37) und (1.39) zu

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}}V^i = \frac{2}{3}\frac{\phi^6}{\omega^3}\tilde{\nabla}^i K - \tilde{\nabla}_j M^{ij}. \quad (1.42)$$

Die Lösung von Gleichung (1.42) erfordert das Fixieren von Randbedingungen bei \mathcal{I}^+ und dem inneren Rand.

Anfangsdaten auf den kompaktifizierten hyperboloidalen Blättern sind durch die Lösung der konformen Zwangsbedingungen (1.34, 1.42) für die Potentiale ϕ und V^i gegeben. Die als freie Daten bezeichneten Größen M^{ij} , K , $\tilde{\gamma}_{ij}$ und ω werden vorgegeben. Die \hat{A}^{ij} sind dann durch die freien Daten und Gleichung (1.39) bestimmt.

⁸Die Bezeichnung als konform, transversal, spurfreie Aufspaltung hat historische Gründe, die Aufspaltung ist nicht transversal, da im Allgemeinen $\nabla_i M^{ij} \neq 0$ ist. Die ursprüngliche Aufspaltung (siehe z. B. COOK [54]) führte jedoch über transversal spurfreie Aufspaltungen zum selben Ergebnis.

1.1.5. Regularität der Zwangsbedingungen

Die Vektorzwangsbedingung (1.42)

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}} V^i = \frac{2}{3} \frac{\phi^6}{\omega^3} \tilde{\nabla}^i K - \tilde{\nabla}_j M^{ij}$$

ist bei \mathcal{I}^+ singulär, da dort ω verschwindet. Diese Singularität kann durch eine geeignete Wahl der mittleren Krümmung, d. h. der hyperboloidalen Blätterung, eliminiert werden. Konkret verschwindet die Singularität bei der Wahl einer Blätterung mit

- asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung (ACMC, asymptotically constant mean curvature), d. h.

$$K = K_0 + \mathcal{O}(\omega^4), \quad (1.43)$$

bzw. dem Spezialfall

- konstanter mittlerer Krümmung (CMC, constant mean curvature), d. h.

$$K = \text{konst.} \quad (1.44)$$

auf dem gesamten Blatt.

Für den Fall konstanter mittlerer Krümmung entkoppeln Vektorzwangsbedingung (1.42) und die Hamiltonzwangsbedingung (1.34), d. h. die Vektorzwangsbedingung kann für sich gelöst werden und mit den daraus gewonnenen \hat{A}^{ij} in einem zweiten Schritt eine Lösung der Hamiltonzwangsbedingung gefunden werden. Im Fall konform flacher Daten $\tilde{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$ sind die Bowen-York Daten [55] eine analytische Lösung der Vektorzwangsbedingung. In Abschnitt 3.2 werden diese Daten verwendet.

Die Hamiltonzwangsbedingung (1.34)

$$8\omega^2 \tilde{\nabla}^2 \phi - 8\omega \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \phi - (\omega^2 \tilde{R} + 4\omega \tilde{\nabla}^2 \omega - 6\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega) \phi = \frac{2}{3} K^2 \phi^5 - \omega^6 \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \phi^{-7}$$

ist singulär, da die Koeffizienten vor den höchsten Ableitungen bei \mathcal{I}^+ verschwinden. Diese Struktur erlaubt Lösungen mit logarithmischen, d. h. nicht regulären Termen. Für den Fall isotroper mittlerer Krümmung haben ANDERSSON, CHRUSCIEL und FRIEDRICH Bedingungen bewiesen, unter denen die Yamabe-Gleichung bis einschließlich \mathcal{I}^+ reguläre Lösungen aufweist [14]. Diese Bedingung wurde von ANDERSSON und CHRUSCIEL [15],

[16] auf eine allgemeine Blätterung mit konstanter mittlerer Krümmung erweitert. Die Regularitätsbedingung stellt sicher, dass für ϕ bis einschließlich \mathcal{J}^+ reguläre Lösungen existieren, wenn die konforme äußere Krümmung auf dem Schnitt des Blattes mit \mathcal{J}^+

$$\tilde{\kappa}_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{s}} \tilde{q}_{ij} \quad (1.45)$$

und die dort eingeprägte Metrik \tilde{q}_{ij}

$$\tilde{q}_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij} - \tilde{s}_i \tilde{s}_j \quad (1.46)$$

zueinander proportional sind.

$$(\tilde{\kappa}_{ij} - \lambda \tilde{q}_{ij})|_{\mathcal{J}^+} = 0 \quad (1.47)$$

Hier ist \tilde{s}^i der konforme Normalenvektor von \mathcal{J}^+ in der hyperboloidalen Blätterung. Die Bedingung (1.47) ist analog zur Aussage, dass \mathcal{J}^+ scherungsfrei sei.

Für sphärisch symmetrische Daten mit isotroper äußerer Krümmung ($K_{ij} = \frac{1}{3} \gamma_{ij} K$), welche im Inneren einen Horizont ausbilden, existieren keine regulären Lösungen, da die Bedingung (1.47) nicht erfüllt ist [56].

Die singuläre Struktur der Hamiltonzwangsbedingung erlaubt in einer Reihenentwicklung von ϕ in normaler Richtung zu \mathcal{J}^+ a priori nur die Bestimmung von $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$. In dritter Ordnung ergibt sich anstelle einer Bedingung an ϕ_3 eine Bedingung an die Anfangsdaten. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Regularitätsbedingung (1.47) erfüllt ist, d. h. \mathcal{J}^+ scherungsfrei ist. Eine Verletzung dieser Bedingung würde logarithmische Terme in ϕ erzeugen, wie in Abschnitt 2.5 anhand eines ausgewählten Beispiels numerisch gezeigt wird. Ab der vierten Ordnung schreiben sich alle höheren Koeffizienten in Abhängigkeit von ϕ_3 , dies erlaubt es einen inneren Rand vorzuschreiben.

BARDEEN et al. [57, 58] vermuten, dass die Regularitätsbedingung (1.47) und die Forderung einer Blätterung mit konstanter mittlerer Krümmung keine auslaufenden Wellen bei \mathcal{J}^+ erlauben.

Für Blätterungen auf denen die mittlere Krümmung nicht konstant ist gibt es bisher nur wenige mathematische Ergebnisse bezüglich der Regularität der Anfangsdaten. ISENBERG und PARK [59] diskutieren die Existenz von asymptotisch hyperbolischen Anfangsdaten. Die Existenz und Beschränktheit einer weiteren Klasse von nicht-CMC Anfangsdaten

wurde in [60] untersucht. Diese Anfangsdaten existieren und sind Beschränkt solange eine „limit equation“ keine nicht trivialen Lösungen besitzt. Im Zusammenhang mit scheinbaren Horizonten wurden von [61, 62] weitere Anfangsdaten für nicht-CMC Blätter diskutiert.

Die in diesen Arbeiten diskutierten nicht-CMC Blätterungen gehören zu anderen Klassen von Blätterungen als die hier diskutierte APMC Blätterung. Für Blätter mit asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung wurden bisher keine Theoreme bewiesen, welche Bedingungen für reguläre Lösungen der Hamiltonzwangsbedingung festlegen. In dieser Arbeit nehmen wir an, dass die Scherungsfreiheit von \mathcal{S}^+ (1.47) die Regularität der Lösung der konformen Zwangsbedingungen (1.34, 1.42) auch für Blätterungen mit asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung sicherstellt. Die Ergebnisse in Kapitel 2 unterstützen diese Vermutung.

1.2. Marginal gefangene Flächen

Für die numerische Lösung der konformen Zwangsbedingungen müssen innere Randbedingungen vorgeschrieben werden. Dabei soll sichergestellt werden, dass die Lösung Schwarze Löcher beschreibt. Die Vorgabe eines Ereignishorizontes ist jedoch nicht möglich, da dafür die gesamte Raumzeit benötigt wird. Eine lokale Definition von Horizonten bieten marginal gefangene Flächen (marginally trapped surfaces) [63–65].

Marginal gefangene Flächen sind als Flächen verschwindender Expansion von Nullgeodäten definiert. Dabei wird zwischen marginal auswärts gefangenen Flächen (MOTS, marginally outer trapped surfaces), bei denen die Expansion auslaufender Nullgeodäten verschwindet, und marginal inwärts gefangenen Flächen (MITS, marginally inner trapped surfaces), bei denen die Expansion einlaufender Nullgeodäten verschwindet, unterschieden. Die äußerste marginal auswärts gefangene Fläche ist der scheinbare Horizont (apparent Horizon). Unter Annahme der schwachen kosmischen Zensur, liegt dieser immer innerhalb oder auf dem, nach einer Evolution bestimmbaren, Ereignishorizont. Dies ermöglicht es, eine marginal auswärts gefangene Fläche als innere Randbedingung für die Hamiltonzwangsbedingung vorzugeben und das Gebiet dort auszuschneiden.

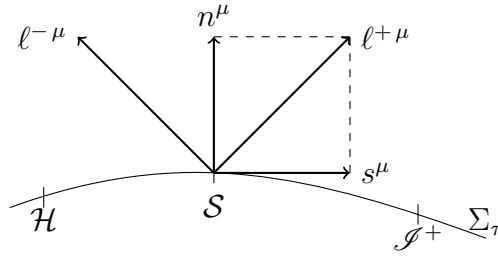


Abbildung 1.3.: Eine Skizze der Vektoren n^μ , s^μ , $\ell^{\pm\mu}$ an der Fläche \mathcal{S} .

Ob es sich bei der vorgeschriebenen Fläche um den scheinbaren Horizont handelt muss mit einem Horizontfinder analysiert werden, da diese marginal auswärts gefangene Fläche nicht notwendigerweise die äußerste marginal auswärts gefangene Fläche sein muss. In Abschnitt [1.3.3](#) wird ein solcher Horizontfinder vorgestellt.

Die Existenz marginal gefangener Flächen hängt von der Blätterung ab. Es ist im Allgemeinen möglich, dass kein scheinbarer Horizont existiert jedoch ein Ereignishorizont gefunden werden kann [\[66\]](#). Für die in Kapitel [2](#) diskutierte Kerr-Lösung stimmt auf einem Blatt mit $\tau = \text{konst.}$ der scheinbare Horizont mit dem Ereignishorizont überein [\[67\]](#).

Auf einer geschlossenen zweidimensionalen Fläche \mathcal{S} , die in den dreidimensionalen hyperboloidalen Blättern Σ_τ eingebettet ist, werden die Nullvektoren

$$\ell^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (n_\mu \pm s_\mu) \quad (1.48)$$

definiert. Hier ist n^μ der Normaleneinheitsvektor der Blätterung Σ_τ und s^μ der Normaleneinheitsvektor von \mathcal{S} .

Die eingeprägte Metrik auf \mathcal{S} kann durch die Nullvektoren und $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt werden.

$$q_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - s_\mu s_\nu \quad (1.49)$$

$$= g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu \quad (1.50)$$

$$= g_{\mu\nu} + \ell^+_\mu \ell^-_\nu + \ell^-_\mu \ell^+_\nu \quad (1.51)$$

Mit der auf \mathcal{S} eingepägten Metrik $q_{\mu\nu}$ ist die Expansion der Nullgeodäten durch

$$\Theta_\pm = q^{\mu\nu} \nabla_\mu \ell^\pm_\nu \quad (1.52)$$

gegeben. Für marginal gefangene Flächen gilt

$$\Theta_{\pm} = 0. \quad (1.53)$$

Mit der Definition der äußeren Krümmung gilt für die Expansion (1.48)

$$q^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \ell_{\nu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\mu\nu} \nabla_{\mu} (n_{\nu} \pm s_{\nu}) \quad (1.54)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} q^{ij} (\pm \nabla_i s_j - K_{ij}) \quad (1.55)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(K - s^i s^j K_{ij} \pm \nabla_i s^i \right). \quad (1.56)$$

Die äußere Krümmung wird gemäß (1.26) in Spur und spurfreien Anteil aufgespalten und der spurfreie Anteil entsprechend (1.30) transformiert. Die Expansion, durch konforme Größen ausgedrückt, ist dann

$$\Theta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} K - \frac{\omega^3}{\phi^6} \tilde{s}^i \tilde{s}^j \hat{A}_{ij} \pm \left(\frac{\omega}{\phi^2} \tilde{\nabla}_i \tilde{s}^i - \frac{2}{\phi^2} \tilde{s}^i \tilde{\nabla}_i \omega + \frac{4\omega}{\phi^3} \tilde{s}^i \tilde{\nabla}_i \phi \right) \right). \quad (1.57)$$

Bei kleinen Störungen einer vorgegebenen stationären Lösung, deren scheinbarer Horizont der innere Rand ist, bleibt der innere Rand auch weiterhin der scheinbare Horizont [67, 68]. Für starke Störungen ist dies, wie in Kapitel 2 gezeigt wird, nicht mehr der Fall.

Während der innere Rand eine MOTS ist, wollen wir noch zeigen, dass \mathcal{J}^+ die Bedingung einer MITS erfüllt. Für die Expansion einlaufender Nullgeodäten gilt bei \mathcal{J}^+

$$\Theta_{-}|_{\mathcal{J}^+} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} K + \phi^{-2} \tilde{s}^i \tilde{\nabla}_i \omega \right). \quad (1.58)$$

Da \mathcal{J}^+ durch $\omega = 0$ beschrieben wird, gilt dort für den Normalenvektor auf der durch \mathcal{J}^+ definierten zweidimensionalen Fläche

$$\tilde{s}_i|_{\mathcal{J}^+} = B \tilde{\nabla}_i \omega. \quad (1.59)$$

Die Normierungsbedingung $\tilde{s}_i \tilde{s}^i = 1$ ergibt $B = \pm \left(\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega \right)^{-\frac{1}{2}}$. Der Normalenvektor auf \mathcal{J}^+ ist somit

$$\tilde{s}_i = - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega}} \tilde{\nabla}_i \omega. \quad (1.60)$$

Aus der Hamiltonzwangsbedingung folgt für das Potential ϕ bei \mathcal{J}^+ (1.36)

$$\phi^2|_{\mathcal{J}^+} = \frac{3}{K} \sqrt{\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega}.$$

Für die Expansion einlaufender Nullgeodäten bei \mathcal{I}^+ (1.58) folgt mit den obigen Betrachtungen

$$\Theta_-|_{\mathcal{I}^+} = 0, \quad (1.61)$$

d. h. \mathcal{I}^+ erfüllt die Bedingung einer marginal inwärts gefangenen Fläche.

Abbildung 1.4 zeigt die Expansionen Θ_{\pm} für die in Abschnitt 1.1.3 diskutierte Schwarzschildmetrik in den kompaktifizierten hyperboloidalen Koordinaten $(\tau, \sigma, \vartheta, \varphi)$. Die Expansionen wurden auf Koordinatenkugeln $\sigma = \text{konst.}$ ermittelt, aufgrund der sphärischen Symmetrie der Schwarzschildlösung ergeben sich in diesem Fall $\Theta_{\pm} = \Theta_{\pm}(\sigma)$.

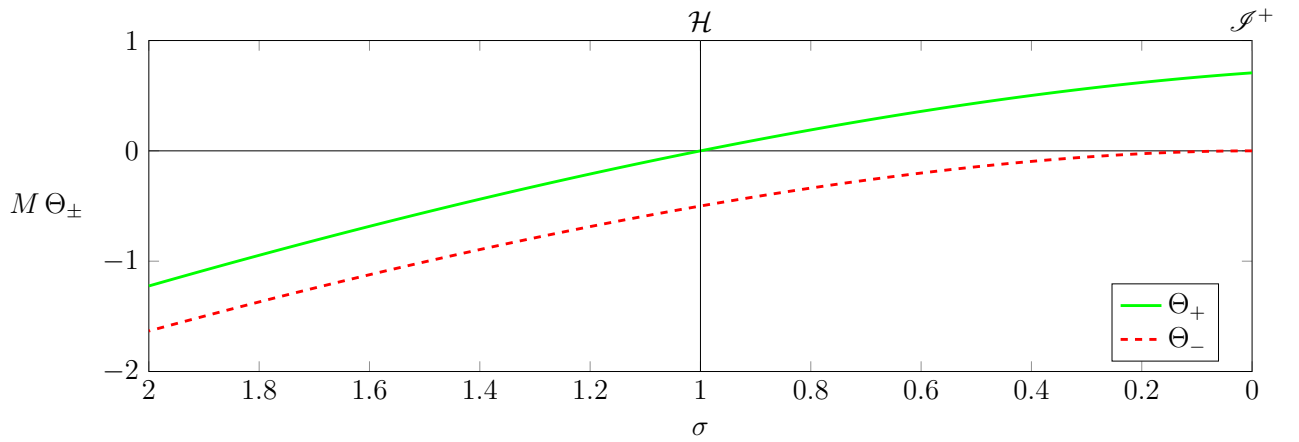


Abbildung 1.4.: Die Expansionen Θ_{\pm} auf Koordinatenkugeln $\sigma = \text{konst.}$ für die in Abschnitt 1.1.3 diskutierte Schwarzschildmetrik in den Koordinaten $(\tau, \sigma, \vartheta, \varphi)$ (1.22). Bei \mathcal{I}^+ ($\sigma = 0$) verschwindet Θ_- und am Horizont ($\sigma = 1$) verschwindet Θ_+ .

1.3. Numerische Methoden

1.3.1. Pseudospektrale Methoden

Diese Arbeit verwendet pseudospektrale Methoden zur hochgenauen Lösung von Differentialgleichungen, eine ausführliche Diskussion dieser Methode bietet z. B. BOYD [69] und mit Bezug auf die numerische Relativitätstheorie GRANDCLÉMENT und NOVAK [70]. Die Idee ist, Funktionen mittels orthonormaler Basisfunktionen zu approximieren, hier werden als Basis die Chebyshevpolynome erster Art $T_n(x)$ verwendet.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (1.62)$$

Die Approximation findet auf nicht-äquidistanten Gittern statt, die durch die Nullstellen bzw. Extrema der Chebyshevpolynome gegeben sind. Die am häufigsten verwendeten Gitter sind in Tabelle 1.1 aufgelistet.

Gitter	x_j	
Rechtsseitiges Chebyshev-Radau-Gitter	$\cos\left(\frac{2\pi j}{n+1}\right)$	$x_j \in (-1, 1]$
Linksseitiges Chebyshev-Radau-Gitter	$-\cos\left(\frac{2\pi j}{n+1}\right)$	$x_j \in [-1, 1)$
Chebyshev-Gauß-Gitter	$-\cos\left(\frac{\pi(j+\frac{1}{2})}{n}\right)$	$x_j \in (-1, 1)$
Chebyshev-Lobatto-Gitter	$-\cos\left(\frac{\pi j}{n-1}\right)$	$x_j \in [-1, 1]$

Tabelle 1.1.: Übersicht über Chebyshev-Gitter und die Verteilung der diskreten n Gitterpunkte x_j mit $j = 0, \dots, n-1$ auf dem Gebiet $x \in [-1, 1]$.

Die Radau-Gitter enthalten jeweils den rechten bzw. linken Rand nicht als Gitterpunkt. Das Chebyshev-Gauß-Gitter hat keine Gitterpunkte auf den Rändern, diese Punkte gehören jedoch zum Gebiet und eine Auswertung der Funktion an diesen Stellen ist eine Interpolation und keine Extrapolation. Da wir an den Rändern der Gebiete Bedingungen vorschreiben wollen, wählen wir das Chebyshev-Lobatto-Gitter. Eine beispielhafte Verteilung der Gitterpunkte ist in Abbildung 1.5 skizziert.

Die approximierte Funktion ist mit den Koeffizienten c_i durch

$$\psi_i = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k T_k(x_i) \quad (1.63)$$

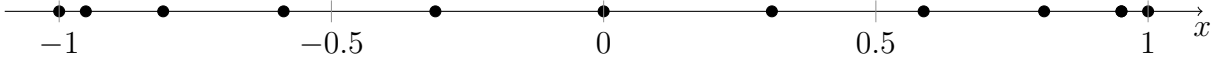


Abbildung 1.5.: Verteilung der Gitterpunkte x_j des Chebyshev-Lobatto-Gitters auf dem Gebiet $x \in [-1, 1]$ für $n=11$ Gitterpunkte.

gegeben. An den Stützstellen $x_i \in [-1, 1]$ soll die Funktion exakt approximiert werden, d. h. $\psi_i = \psi(x_i)$. Aus dieser Bedingung folgt für die Koeffizienten

$$c_i = \frac{2 - \delta_i^{n-1}}{2(n-1)} \left[\psi(1) + (-1)^i \psi(-1) + 2 \sum_{j=0}^{n-2} \psi_j T_i(x_j) \right]. \quad (1.64)$$

Eine schnelle Implementierung der Transformationen bietet der Clenshaw-Algorithmus [71, 72]. Die Struktur der Chebyshevpolynome erlaubt es jedoch die Koeffizienten mittels einer Fouriertransformation zu bestimmen, in diesem Fall einer Kosinustransformation [69]. Abbildung 1.6 zeigt das Verhältnis der Laufzeiten für die Transformationen (1.63,

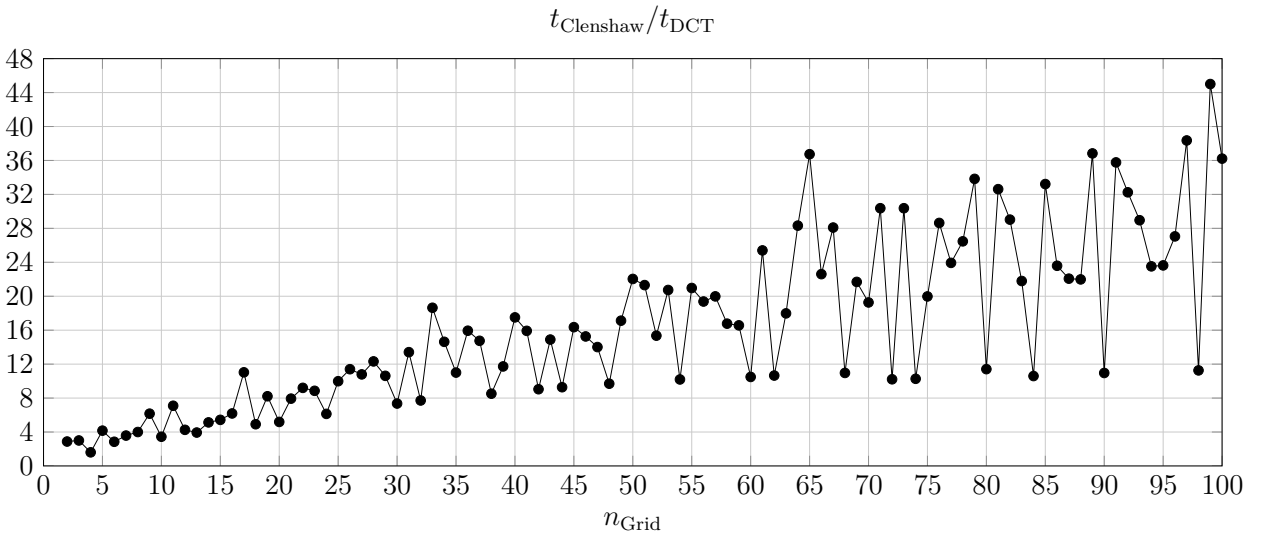


Abbildung 1.6.: Verhältnis der Laufzeiten für 1000 Chebyshevtransformationen des Clenshaw-Algorithmus mit einem auf einer diskreten Kosinustransformation (DCT) basierenden Algorithmus.

(1.64) bei Verwendung des Clenshaw-Algorithmus bzw. einer Fouriertransformation. Für die Fouriertransformation wurde die FFTW-Bibliothek [73] verwendet. Die in Abbildung 1.6 vorgestellte Messung beinhaltet die für die FFTW notwendige Initialisierung, gemessen wurde die gesamte benötigte Zeit für 1000 Transformationen. Die starken Schwankungen im Geschwindigkeitsvorteil der FFTW gegenüber dem Clenshaw-Algorithmus liegen

darin begründet, dass die FFT für Gittergrößen welche in einer Primzahlfaktorzerlegung die Primzahlen $\{2, 3, 5, 7\}$ enthalten optimiert ist.

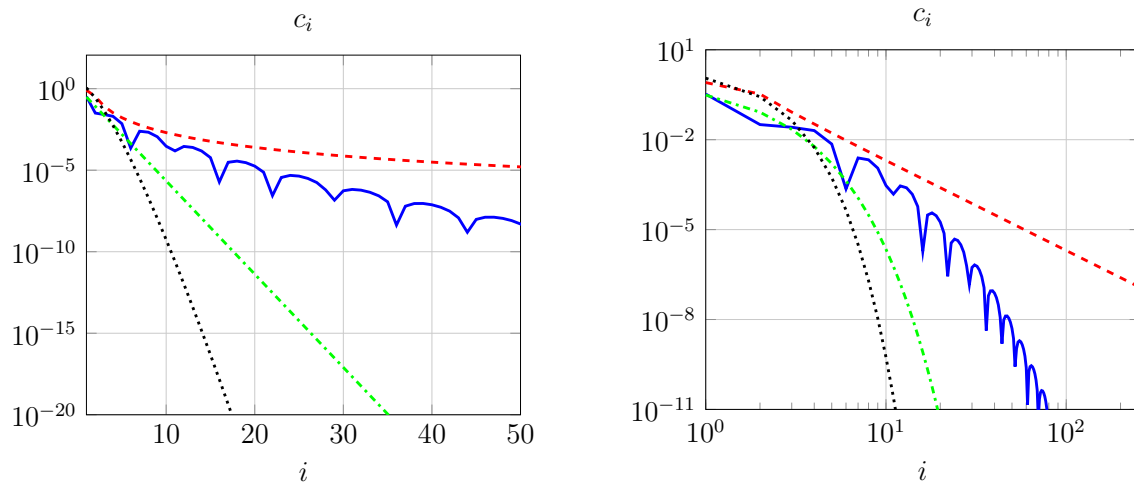


Abbildung 1.7.: Beispiele für das Abfallverhalten der Chebyshevkoeffizienten in einfach logarithmischer Darstellung (linke Grafik) und doppelt logarithmischer Darstellung (rechte Grafik). Die Beispielfunktionen wurden auf dem Gebiet $x \in [-1, 1]$ betrachtet. Die rote/gestrichelte Linie zeigt den algebraischen Abfall der Koeffizienten der Funktion $f(x) = (x+1) \log(x+1)$. Die blaue/durchgezogene Linie stellt die Koeffizienten der Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}}$ dar, dieser Abfall heißt subgeometrisch. Der geometrische Abfall wird durch die Koeffizienten der Funktion $f(x) = 1/(x+2)$ mit der grünen/durchgezogenen Linie dargestellt. Die gepunktete/schwarze Linie zeigt die Koeffizienten des supergeometrischen Abfalls der Funktion $f(x) = e^x$.

Die pseudospektrale Methode erlaubt die hochgenaue Bestimmung der Ableitung mittels einer Rekursionsrelation für die Koeffizienten. Die Koeffizienten der Ableitungen c'_i folgen aus den Koeffizienten c_i der Funktion durch

$$c'_n = c'_{n-1} = 0 \quad c'_{i-1} = 2ic_i + c'_{i+1} \quad (i = n-1, \dots, 2). \quad (1.65)$$

Die zu approximierenden Funktionen lassen sich anhand des Abfalls ihrer Chebyshevkoeffizienten charakterisieren. Auf dem betrachteten Gebiet analytische Funktionen weisen einen geometrischen Abfall der Chebyshevkoeffizienten auf, d. h. der Logarithmus der Koeffizienten über ihrem Index entspricht einer Gerade. Fallen die Koeffizienten schneller als

eine Gerade ab, handelt es sich um eine supergeometrische Konvergenz. Funktionen, welche auf dem Gebiet nur endlich oft stetig differenzierbar sind weisen einen algebraischen Abfall auf, d. h. in einer doppelt logarithmischen Darstellung bilden die Koeffizienten über ihrem Index eine Gerade. Funktionen welche auf dem Gebiet nur \mathcal{C}^∞ sind weisen einen subgeometrischen Abfall ihrer Chebyshevkoeffizienten auf, d. h. der Abfall ist besser als algebraisch und schlechter als geometrisch. Abbildung 1.7 zeigt eine Übersicht der verschiedenen Abfallverhalten anhand von Beispielfunktionen.

Im Folgenden wird ein mindestens subgeometrisches Konvergenzverhalten als spektrale bzw. exponentielle Konvergenz bezeichnet. Die numerische Beobachtung spektraler Konvergenz ist ein starkes Indiz für die Regularität der betrachteten Funktion.

1.3.2. Newton-Raphson-Verfahren

Die Differentialgleichungen werden auf zweidimensionalen rechteckigen Gebieten, welche mit $j \in \{0, 1\}$ bezeichnet werden, an den Chebyshev-Lobatto-Punkten

$$\begin{aligned} A_i^j &= \sin^2 \left(\frac{\pi i}{2(n_A^j - 1)} \right) & (i = 1, \dots, n_A^j - 1) \\ B_i &= -\cos \left(\frac{\pi i}{(n_B - 1)} \right) & (i = 1, \dots, n_B - 1) \end{aligned} \quad (1.66)$$

ausgewertet. Die spektrale Koordinate $B \in [-1, 1]$ entspricht einer Winkelkoordinate, und

$A \in [0, 1]$ ⁹ einer radialen Koordinate in den betrachteten axialsymmetrischen Gebieten. Die numerischen Berechnungen in Kapitel 2 und Abschnitt 3.1 verwenden ein Gebiet, während in Abschnitt 3.2 zwei Gebiete benötigt werden.

Die zu lösenden Gleichungen werden an den Gitterpunkten in einem Vektor \mathbf{F} zusammengefasst. Für k gesuchte Funktionen enthält \mathbf{F} damit $k \times (n_A^1 + n_A^2) \times n_B$ Einträge. Mit dem Vektor können die Chebyshev-Koeffizienten sowie beliebige Ableitungen der Funktionen in den Gebieten berechnet werden. Die Auswertung der Differentialgleichung und der Randbedingungen an den Chebyshev-Lobatto-Punkten (1.66) ergibt ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für die gesuchten Funktionen auf den Gitterpunkten.

⁹In der Verteilung der Chebyshev-Lobatto-Punkte in (1.66) wurde $A \in [0, 1]$ ausgenutzt.

Das Gleichungssystem wird mit einem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Dabei wird die Jacobi-Matrix mit dem iterativen bicgstab-Verfahren invertiert (bi-conjugate gradient stabilizes method) [74]. Diese Methode benötigt einen Präkonditionierer, hier wird die Jacobi-Matrix mit finiten Differenzen genähert und mit einem Band-Matrix-Algorithmus invertiert [72].

Als Startlösung für das Newton-Raphson-Verfahren wählen wir in Kapitel 2 und Abschnitt 3.1 analytische bekannte Lösungen und modifizieren diese über einen Parameter. Jede gefundene Lösung ist dann wiederum eine Startlösung für ein weiteres Newton-Raphson-Verfahren. Dies ermöglicht es uns, den gesamten Parameterraum der Lösungen zu untersuchen.

In Abschnitt 3.2 existiert kein analytisch bekannter Spezialfall, als Startlösung wird dort für eine „einfache“ Parameterwahl, das erste Glied einer Reihenentwicklung der Lösung, verwendet. Für diese Konfiguration kann das Newton-Raphson-Verfahren Lösungen finden. Anschließend kann wie im obigen Fall der Parameterraum durchlaufen werden. Eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens bietet Abschnitt 3.2.3.

1.3.3. Horizontfinder

Da die als Randbedingung vorgeschriebene marginal auswärts gefangene Fläche nicht notwendigerweise auch der scheinbare Horizont der gefundenen Konfiguration sein muss, ist es für eine gründliche Untersuchung des Verhaltens der marginal gefangenen Flächen notwendig, einen Horizontfinder zu implementieren. Im Folgenden wird ein einfacher, auf die diskutierten Fragestellungen angepasster Horizontfinder vorgestellt. Eine Übersicht bietet z. B. [75, 76].

Für die gesuchte marginal gefangene Fläche $\mathcal{S}(r, \vartheta) = 0$ verwenden wir den Strahlkörpersansatz [77]. Da in dieser Arbeit axialsymmetrische Probleme diskutiert werden, ist der entsprechende, axialsymmetrische Ansatz durch

$$\mathcal{S}(r, \vartheta) = r - H(\vartheta) \tag{1.67}$$

gegeben. Ein Horizont wird dann durch $r_{\mathcal{H}} = H(\vartheta)$ für die noch zu bestimmende Funktion $H(\vartheta)$ beschrieben. Der Normalenvektor auf $\mathcal{S}(r, \vartheta)$ ist

$$\tilde{s}_i = B \tilde{\nabla}_i \mathcal{S}(r, \vartheta) \quad (1.68)$$

mit der Normierung $B = \pm(\gamma^{ij} \tilde{\nabla}_i \mathcal{S} \tilde{\nabla}_j \mathcal{S})^{-\frac{1}{2}}$. Das Vorzeichen von B ist durch die konkrete Koordinatenwahl definiert. Für die in Abschnitt [1.1.3](#) eingeführte inverse radiale Koordinate, $\sigma = \frac{2M}{r}$ muss das negative Vorzeichen gewählt werden, damit \tilde{s}^i nach \mathcal{I}^+ zeigt.

Einsetzen von Gleichung [\(1.68\)](#) in die Expansion [\(1.57\)](#) ergibt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $H(\vartheta)$. Bei der Suche nach einem scheinbaren Horizont, mittels eines Newton-Raphson-Verfahrens, wird eine Startlösung für $H_1(\vartheta)$ dergestalt vorgegeben, dass $\mathcal{S}(r, \vartheta) \in \mathcal{I}^+$ entspricht. Diese Lösung erfüllt die Differentialgleichung nicht, es gilt

$$\Theta_+(H_1(\vartheta)) = \varepsilon E. \quad (1.69)$$

mit $\varepsilon = 1$. Der scheinbare Horizont wird über die Lösung der Folge von Differentialgleichungen für $\varepsilon = 1 \dots 0$ gefunden. Dabei nähert sich die durch $H_\varepsilon(\vartheta)$ gegebene Fläche $\mathcal{S}_\varepsilon(r, \vartheta)$ langsam gegen die äußerste marginal gefangenen Fläche, dem scheinbaren Horizont \mathcal{H} an, bis $\mathcal{S}_0(r, \vartheta)$ bei $\varepsilon = 0$ dem scheinbaren Horizont entspricht.

Dazu approximieren wir $H_\varepsilon(\vartheta)$ auf einem eindimensionalen Chebyshev-Lobatto-Gitter. In der Differentialgleichung auftretende Abhängigkeiten $f(r)$ werden als $f(r) = f(H_\varepsilon(\vartheta))$ pseudospektral interpoliert. Dann wird, wie in Abschnitt [1.3.2](#) beschrieben, ein Newton-Raphson-Verfahren verwendet. Es müssen keine über die Differentialgleichung hinausgehenden Bedingungen an die $H_\varepsilon(\vartheta)$ gestellt werden.

Bei der Suche nach marginal inwärts gefangenen Flächen wird genauso vorgegangen, als Startlösung jedoch der innere Rand des Gebietes vorgegeben.

2. Die APMC-Blätterung

Im Folgenden werden Anfangsdaten für ein gestörtes Kerrsches Schwarzes Loch auf hyperboloidalen APMC-Blättern konstruiert, d. h. einer Blätterung mit asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung $K = K_0 + \mathcal{O}(\omega^4)$. Die konformen Zwangsbedingungen (1.34, 1.42) auf diesem Blatt sind

$$8\omega^2 \tilde{\nabla}^2 \phi - 8\omega \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \phi - (\omega^2 \tilde{R} + 4\omega \tilde{\nabla}^2 \omega - 6\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega) \phi = \frac{2}{3} K^2 \phi^5 - \omega^6 \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \phi^{-7}$$

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}} V^i = \frac{2}{3} \frac{\phi^6}{\omega^3} \tilde{\nabla}^i K - \tilde{\nabla}_j M^{ij}$$

mit $\hat{A}^{ij} = (\tilde{\mathcal{L}}V)^{ij} + M^{ij}$ (1.39). Die Vektorzwangsbedingung ist durch die APMC-Forderung an die mittlere Krümmung regulär. Für die Hamiltonzwangsbedingung wird die Regularitätsbedingung (siehe Abschnitt 1.1.5, insbesondere Gleichung (1.47)) für die CMC-Blätterung übernommen und vermutet, dass diese auch für die APMC-Blätterung gilt.

Sowohl die Regularitätsbedingung für die Hamiltonzwangsbedingung als auch die Forderung nach einer APMC-Blätterung stellen Bedingungen an die Höhenfunktion zur Konstruktion hyperboloidaler Blätter (siehe Abschnitt 1.1.2). In der Höhenfunktion wird eine zusätzliche reguläre Funktion A eingeführt. Die Bedingungen an die Höhenfunktion schreiben sich als Bedingungen an A .

Die Konstruktion einer Funktion A , die eine Höhenfunktion erzeugt, welche die Regularitätsbedingung für die Hamiltonzwangsbedingung und die APMC-Blätterung realisiert, wird in den Abschnitten 2.1 - 2.3 beschrieben. Auf diesen Blättern werden in Abschnitt 2.4 Anfangsdaten numerisch bestimmt. Eine ausführliche Analyse der spektralen Konvergenz der konstruierten Daten in Abschnitt 2.5 unterstützt die Vermutung, dass die Regularitätsbedingung der Hamiltonzwangsbedingung für die CMC-Blätterung auf die APMC-Blätterung übertragen werden kann und reguläre Daten konstruiert wurden.

Im Abschnitt [2.6](#) werden die konstruierten Daten physikalisch untersucht. Eine Analyse der marginal gefangenen Flächen zeigt, dass sowohl gestörte Schwarze als auch Weiße Löcher konstruiert wurden (Abschnitt [2.6.1](#)). Eine Multipolentwicklung des scheinbaren Horizontes bestätigt, dass es sich tatsächlich um gestörte Kerrsche Schwarze Löcher handelt (Abschnitt [2.6.2](#)). Des Weiteren werden mithilfe der Bondi-Masse (Abschnitt [2.6.3](#)) bekannte, auf Cauchy-Blättern formulierte, Ungleichungen für Schwarze Löcher auf hyperboloidale Blätter übertragen und verifiziert (Abschnitt [2.6.4](#)).

2.1. Hyperboloidale Blätter für ein Kerrsches Schwarzes Loch

Die Kerr-Lösung in Kerr Koordinaten $(V, r, \vartheta, \varphi)$ ist

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dV^2 + 2dVdr - \frac{4Mra}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dVd\varphi + \rho^2 d\vartheta^2 - 2a \sin^2 \vartheta drd\varphi + \frac{1}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \vartheta \right] \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (2.1)$$

mit

$$\rho = \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad \text{und} \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (2.2)$$

Die Größen M und $J = aM$ sind die Masse und der Drehimpuls des Schwarzen Loches, wobei der dimensionslose Drehimpuls als

$$j = \frac{a}{M} = \frac{J}{M^2} \quad (2.3)$$

definiert ist. Der Ereignishorizont liegt in diesen Koordinaten bei $r_h = M(1 + \sqrt{1 - j^2})$, d. h. im Schwarzschildfall ($j = 0$) ist $r_h = 2M$ und $r_h = M$ für das extreme Kerrsche Schwarze Loch ($|j| = 1$).

Wie in Abschnitt [1.1.2](#) diskutiert, erhalten wir die hyperboloidale Blätterung durch asymptotische Integration auslaufender Nullgeodäten. Diese sind durch

$$ds^2 = 0, \quad d\vartheta = 0, \quad d\varphi = 0, \quad dVdr > 0 \quad (2.4)$$



charakterisiert. Damit folgt aus (2.1)

$$dV = \frac{2dr}{1 - \frac{2Mr}{\rho^2}} = 2 \left[1 + \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] dr. \quad (2.5)$$

Eine asymptotische Integration ergibt

$$V = 4M \left[C + \left(\frac{r}{2M} + \log \frac{r}{2M} \right) \right] \quad (2.6)$$

mit der Integrationskonstanten C . Ausgehend von (2.6) erhalten wir den Ansatz

$$\vartheta = \arccos \mu \quad (2.7)$$

$$r = \frac{2M}{\sigma} \quad (2.8)$$

$$V = 4M \left[\tau + \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma} - \log(\sigma) + A(\sigma, \mu) \right)}_h \right] \quad (2.9)$$

für eine Koordinatentransformation, welche von Kerr-Koordinaten auf allgemeine axialsymmetrische kompaktifizierte hyperboloidale Blätter führt. In den neuen $(\tau, \sigma, \mu, \varphi)$ Koordinaten sind Blätter mit $\tau = \text{konst.}$ hyperboloidal. In diesen Koordinaten ist \mathcal{I}^+ durch $\sigma = 0$ gegeben, während der Ereignishorizont bei

$$\sigma_h = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - j^2}} \quad (2.10)$$

liegt. Dies motiviert die Wahl von ω in der Zerlegung von Ω (1.32) als

$$\omega = \sigma. \quad (2.11)$$

Diese Wahl erfüllt die an ω gestellten Bedingungen der Positivität und des nichtverschwindenden Gradienten bei \mathcal{I}^+ .

In Gleichung (2.9) ist die in Abschnitt 1.1.2 eingeführte Höhenfunktion gekennzeichnet. Für die in der Höhenfunktion zusätzlich auftretende Funktion $A(\sigma, \mu)$ kann eine beliebige reguläre Funktion gewählt werden, solange die $\tau = \text{konst.}$ -Blätter außerhalb von \mathcal{I}^+ raumartig bleiben. Diese Freiheit wird genutzt, um Bedingungen an $A(\sigma, \mu)$ zu stellen, damit die resultierende hyperboloidale Blätterung die APMC-Bedingung (1.43) und die Regularitätsbedingung für die Hamiltonzwangsbedingung (1.47) erfüllt.

2.2. Diskussion der Regularitätsbedingung auf hyperboloidalen Blättern für ein Kerrsches Schwarzes Loch

Für die im vorigen Abschnitt [2.1](#) konstruierten hyperboloidalen Blätter sollen Bedingungen an die freie Funktion $A(\sigma, \mu)$ gefunden werden, so dass die in Abschnitt [1.1.5](#) diskutierte Regularitätsbedingung [\(1.47\)](#)

$$(\tilde{\kappa}_{ij} - \lambda \tilde{q}_{ij})|_{\mathcal{S}^+} = 0$$

erfüllt ist. Dies entspricht der Bedingung, dass \mathcal{S}^+ scherungsfrei sei.

In hyperboloidalen Koordinaten $(\tau, \sigma, \mu, \varphi)$ und mit freier Funktion $A(\sigma, \mu)$ [\(2.9\)](#) ist die auf \mathcal{S}^+ eingetragene konforme Metrik [\(1.46\)](#)

$$\tilde{q}_{ij}|_{\mathcal{S}^+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} (1 - \mu^2) (j^2 + 16 A_{,\mu}^2|_{\mathcal{S}^+}) & \frac{1}{2} A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+} & \frac{j}{8} (1 - \mu^2) \\ \frac{1}{2} A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+} & \frac{1}{4(1-\mu^2)} & 0 \\ \frac{j}{8} (1 - \mu^2) & 0 & \frac{1}{4} (1 - \mu^2) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Die konforme äußere Krümmung von \mathcal{S}^+ [\(1.45\)](#) ist in den gewählten Koordinaten

$$\tilde{\kappa}_{11}|_{\mathcal{S}^+} = -\frac{1}{2} \frac{(\mu^2 - 1) A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+}}{\sqrt{16 (\mu^2 - 1) A_{,\mu}^2|_{\mathcal{S}^+} + 16 A_{,\sigma}|_{\mathcal{S}^+} + j^2 \mu^2 - j^2 + 16}} \quad (2.13)$$

$$\cdot \left(32 (\mu^2 - 1) A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+} A_{,\mu\mu}|_{\mathcal{S}^+} + 32 \mu A_{,\mu}^2|_{\mathcal{S}^+} + 48 A_{,\sigma\mu}|_{\mathcal{S}^+} + 5 j^2 \mu \right)$$

$$\tilde{\kappa}_{12}|_{\mathcal{S}^+} = 0 \quad (2.14)$$

$$\tilde{\kappa}_{13}|_{\mathcal{S}^+} = \frac{j \mu (\mu^2 - 1) A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+}}{\sqrt{16 (\mu^2 - 1) A_{,\mu}^2|_{\mathcal{S}^+} + 16 A_{,\sigma}|_{\mathcal{S}^+} + j^2 \mu^2 - j^2 + 16}} \quad (2.15)$$

$$\tilde{\kappa}_{22}|_{\mathcal{S}^+} = 0 \quad (2.16)$$

$$\tilde{\kappa}_{23}|_{\mathcal{S}^+} = 0 \quad (2.17)$$

$$\tilde{\kappa}_{33}|_{\mathcal{S}^+} = \frac{2 \mu (\mu^2 - 1) A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+}}{\sqrt{16 (\mu^2 - 1) A_{,\mu}^2|_{\mathcal{S}^+} + 16 A_{,\sigma}|_{\mathcal{S}^+} + j^2 \mu^2 - j^2 + 16}}. \quad (2.18)$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten von $\tilde{q}_{ij}|_{\mathcal{S}^+}$ und $\tilde{\kappa}_{ij}|_{\mathcal{S}^+}$ folgt die Forderung

$$A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+} = 0 \quad (2.19)$$



und damit $\lambda = 0$, um die Regularitätsbedingung (1.47) zu erfüllen. Aus dieser Forderung folgt, dass die äußere Krümmung $\tilde{\kappa}_{ij}$ und damit auch die mittlere Krümmung $\tilde{\kappa}$ von \mathcal{J}^+ verschwindet.

$$\tilde{\kappa}_{ij}|_{\mathcal{J}^+} = 0 \quad \tilde{\kappa}|_{\mathcal{J}^+} = (\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{\kappa}_{ij})|_{\mathcal{J}^+} = 0 \quad (2.20)$$

2.3. Hyperboloidale ACMC-Blätter für ein Kerrsches Schwarzes Loch

Nachdem im Abschnitt 2.2 eine Bedingung an $A(\sigma, \mu)$ gefunden wurde, damit die Regularitätsbedingung (1.47) erfüllt ist, sollen im Folgenden asymptotische Bedingungen an $A(\sigma, \mu)$ bei \mathcal{J}^+ ($\sigma = 0$) gefunden werden, um eine ACMC-Blätterung zu konstruieren.

Aus der Definition der mittleren Krümmung (1.4) und der ACMC-Forderung (1.43)

$$K = K_0 + \mathcal{O}(\sigma^4)$$

ergeben sich die asymptotischen Bedingungen an $A(\sigma, \mu)$

$$A|_{\sigma=0} = a_{00} + a_{01}\mu \quad (2.21)$$

$$\partial_\sigma A|_{\sigma=0} = a_1 - \frac{j^2\mu^2}{16} \quad (2.22)$$

$$\partial_\sigma^2 A|_{\sigma=0} = -1 + \frac{j^2}{4} \quad (2.23)$$

$$\partial_\sigma^3 A|_{\sigma=0} = -2(4 + 6a_1 + 3a_1^2) + j^2 \left(1 + \frac{3}{4}\mu^2(1 + a_1) - \frac{3}{128}j^2\mu^4 \right). \quad (2.24)$$

Mit der durch die Regularitätsbedingung an $A(\sigma, \mu)$ gestellten Forderung (2.19)

$$A_{,\mu}|_{\mathcal{J}^+} = 0$$

folgt $a_{01} = 0$.

Weiterhin setzen wir $a_{00} = 0$, da dies einzig einer Verschiebung der Zeitkoordinate entspricht. Aus der Forderung von $a_{01} = 0$ folgt, dass a_1 nicht von μ abhängt (78) (siehe Kapitel 3, Gleichung (3.16)).

Zur Realisierung der ACMC-Blätterung ist man prinzipiell in der Wahl der Funktion $A(\sigma, \mu)$ frei, solange die Bedingungen (2.21 - 2.24), sowie (2.19) erfüllt sind und das

Blatt innerhalb des Gebietes raumartig ist. Vom numerischen Standpunkt ist es jedoch wünschenswert, wenn die Koeffizientenfunktionen der Zwangsbedingungen (1.34, 1.42) „möglichst glatt“ sind, d. h., der Abfall der Chebyshev-Koeffizienten der Koeffizientenfunktionen soll möglichst steil sein. Ein steiler Abfall der Chebyshev-Koeffizienten erlaubt es, hochpräzise Lösungen mit weniger Gitterpunkten, d. h. mit weniger Rechenaufwand, zu erzeugen. Ein Indikator für den Anstieg des Abfalls der Chebyshev-Koeffizienten sind die Chebyshev-Koeffizienten des konformen lapse.

$$\tilde{\alpha} = \Omega\alpha = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}^{00}}} \quad (2.25)$$

Eine gute Wahl für $A(\sigma, \mu)$, welche die Bedingungen (2.21 - 2.24) erfüllt und rasch abfallende Chebyshev-Koeffizienten des konformen lapse aufweist, ist eine diagonale Padé-Approximation. Diese ist durch

$$A(\sigma, \mu) = \mathfrak{P}_n(\sigma, \mu) = \frac{\sum_{k=0}^n \mathfrak{b}_k(\mu) \sigma^k}{1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{c}_k(\mu) \sigma^k} \quad (2.26)$$

definiert. Die Koeffizienten $\mathfrak{b}_k(\mu)$ und $\mathfrak{c}_k(\mu)$ sind durch die ersten $2n$ Ableitungen von $A(\sigma, \mu)$ bei $\sigma = 0$ fixiert, welche durch die Gleichungen (2.21 - 2.24) gegeben sind. Um die Bedingungen zu realisieren, wird mindestens $n = 2$ benötigt, dies erlaubt einen weiteren freien Parameter, a_4 , den wir als Konstante wählen.

$$a_4 = \partial_\sigma^4 A(\sigma, \mu)|_{\sigma=0} \quad (2.27)$$

Für die Transformationsfunktion $A(\sigma, \mu)$ ergibt sich somit

$$A(\sigma, \mu) = \mathfrak{P}_2(\sigma, \mu) \quad (2.28)$$

$$= \frac{\sigma Z}{N} \quad (2.29)$$

mit

$$Z = 24p_1 (p_1 p_3 - p_2^2) - (a_4 p_1^2 + 24p_2^3 - 48p_1 p_2 p_3) \sigma \quad (2.30)$$

$$N = 24 (p_1 p_3 - p_2^2) + (24p_2 p_3 - a_4 p_1) \sigma + (a_4 p_2 - 24p_3^2) \sigma^2 \quad (2.31)$$

und den Koeffizienten $p_i = p_i(\mu; j)$

$$p_1 = a_1 - \frac{j^2 \mu^2}{16} \quad (2.32)$$

$$p_2 = \frac{1}{8} (j^2 - 4) \quad (2.33)$$

$$p_3 = -\frac{1}{6} (8 + 12a_1 + 6a_1^2 - j^2) + \frac{1}{8} (1 + a_1) j^2 \mu^2 - \frac{j^4 \mu^4}{256}. \quad (2.34)$$



Dieses in (2.29) konstruierte $A(\sigma, \mu)$ führt in der Koordinatentransformation (2.9) für $\tau = \text{konst.}$ auf hyperboloidale Blätter mit asymptotisch konstanter mittlerer Krümmung. Die beiden in (2.29) noch enthaltenen freien Parameter a_1 und a_4 werden so fixiert, dass der Abfall der Chebyshev-Koeffizienten $c_k^{(\tilde{\alpha})}$ des konformen lapse maximiert wird. Dafür interpolieren wir den Logarithmus der Koeffizienten linear über ihren Index.

$$\text{Fit} [\log(M|c_k^{(\tilde{\alpha})}|)] = f_1 + f_2 \cdot k \quad (2.35)$$

Mittels eines Simplex-Algorithmus wird f_2 minimiert. Dieses Verfahren hängt von j ab, eine quadratische Interpolation in j ergibt

$$a_1 = \frac{113}{100} + \frac{9}{500}|j| + \frac{3}{40}j^2 \quad (2.36)$$

$$a_4 = 4! \left(\frac{161}{10} + \frac{3}{4}|j| - \frac{5}{2}j^2 \right). \quad (2.37)$$

Die Terme $\propto |j|$ sind ein Effekt der Interpolation. In einem allgemeineren Ansatz würde man solche Terme vermeiden, da die Kerr Metrik mit Termen beschrieben werden sollte, die glatt in j sind. Für diesen Fall kann so jedoch auf einfache Art und Weise ein reguläres hyperboloidales APMC-Blatt erzeugt werden, auf denen die Chebyshev-Koeffizienten der Zwangsbedingungen schnell abfallen.

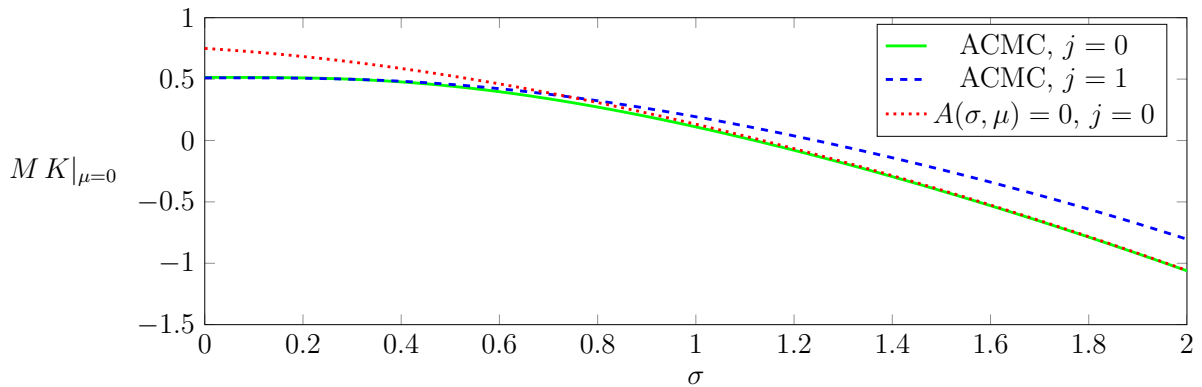


Abbildung 2.1.: Die mittlere Krümmung $K(\sigma, \mu = 0)$ in der APMC-Blätterung für den Schwarzschildfall ($j = 0$) und das extreme Kerrsche Schwarze Loch ($j = 1$). Zum Vergleich ist K für $A(\sigma, \mu) = 0$, ebenfalls für den Schwarzschildfall, dargestellt.

Die mittlere Krümmung dieser so konstruierten hyperboloidalen APMC-Blätter ist asymptotisch

$$K(\sigma, \mu) = \frac{3}{M\sqrt{16(1+a_1)-j^2}} + \mathcal{O}(\sigma^4). \quad (2.38)$$

In Abbildung [2.1](#) ist die mittlere Krümmung in der Äquatorialebene der ACMC-Blätterung skizziert, sowie als Vergleich der $(A = 0)$ -Fall. Am Schwarzschildfall ist gut zu erkennen, dass die gewählte Padé-Approximation die mittlere Krümmung bei \mathcal{S}^+ deformiert, während sie sich innerhalb des Gebietes dem $(A = 0)$ -Fall annähert.

2.4. Anfangsdaten für ein gestörtes Kerrsches Schwarzes Loch

Das System der Zwangsbedingungen ([1.34](#), [1.42](#), [1.39](#))

$$\begin{aligned} 8\omega^2 \tilde{\nabla}^2 \phi - 8\omega \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \phi - (\omega^2 \tilde{R} + 4\omega \tilde{\nabla}^2 \omega - 6\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega) \phi &= \frac{2}{3} K^2 \phi^5 - \omega^6 \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \phi^{-7} \\ \tilde{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}} V^i &= \frac{2}{3} \frac{\phi^6}{\omega^3} \tilde{\nabla}^i K - \tilde{\nabla}_j M^{ij} \\ \hat{A}^{ij} &= (\tilde{\mathcal{L}} V)^{ij} + M^{ij} \end{aligned}$$

wird für die numerische Lösung in Koeffizientenfunktionen und die gesuchten Potentiale ϕ und V^i zerlegt. Die Koeffizientenfunktionen werden mittels MATHEMATICA a priori hochpräzise auf den Chebyshev-Lobatto-Gitterpunkten berechnet.

Mit den oben eingeführten Koordinaten $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\tau, \sigma, \mu, \varphi)$ und $\omega = \sigma$ ist die Hamiltonzwangsbedingung

$$H_1 \phi_{,11} + H_2 \phi_{,22} + H_3 \phi_{,12} + H_4 \phi_{,1} + H_5 \phi_{,2} + H_6 \phi + H_7 \phi^5 + H_8 \phi^{-7} = 0. \quad (2.39)$$

Die H_i sind durch

$$H_1 = 8\sigma^2 \tilde{\gamma}^{11} \quad (2.40)$$

$$H_2 = 8\sigma^2 \tilde{\gamma}^{22} \quad (2.41)$$

$$H_3 = 16\sigma^2 \tilde{\gamma}^{12} \quad (2.42)$$

$$H_4 = -8\sigma^2 \tilde{\gamma}^{ab} \tilde{\Gamma}_{ab}^1 - 8\sigma \tilde{\gamma}^{11} \quad (2.43)$$

$$H_5 = -8\sigma^2 \tilde{\gamma}^{ab} \tilde{\Gamma}_{ab}^2 - 8\sigma \tilde{\gamma}^{21} \quad (2.44)$$

$$H_6 = -\sigma^2 \tilde{R} + 4\sigma \tilde{\gamma}^{ab} \tilde{\Gamma}_{ab}^1 + 6\tilde{\gamma}^{11} \quad (2.45)$$

$$H_7 = -\frac{2}{3} K^2 \quad (2.46)$$

$$H_8 = \sigma^6 \left(\mathfrak{k}^{ijb}{}_a V^a{}_{,b} + \mathfrak{l}^{ij}{}_a V^a + \mathfrak{m}^{ij} \right) \left(\mathfrak{k}_{ij}{}^b{}_a V^a{}_{,b} + \mathfrak{l}_{ija} V^a + \mathfrak{m}_{ij} \right) \quad (2.47)$$



definiert. Die Zerlegung der \hat{A}^{ij} und \hat{A}_{ij} in

$$\tilde{A}^{ij} = \mathfrak{k}^{ijb} V^a_{,b} + \mathfrak{l}^{ij}_a V^a + \mathfrak{m}^{ij} \quad (2.48)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \mathfrak{k}_{ij}^b V^a_{,b} + \mathfrak{l}_{ija} V^a + \mathfrak{m}_{ij} \quad (2.49)$$

wurde in (2.47) angewandt. Die entsprechenden \mathfrak{k} , \mathfrak{l} und \mathfrak{m} sind durch

$$\mathfrak{k}^{ijb}_a = \tilde{\gamma}^{bi} \delta^j_a + \tilde{\gamma}^{bj} \delta^i_a - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \delta^b_a \quad (2.50)$$

$$\mathfrak{l}^{ij}_a = \left(\tilde{\gamma}^{ki} \tilde{\Gamma}^j_{ka} + \tilde{\gamma}^{kj} \tilde{\Gamma}^i_{ka} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{\Gamma}^k_{ka} \right) \quad (2.51)$$

$$\mathfrak{m}^{ij} = M^{ij} \quad (2.52)$$

und

$$\mathfrak{k}_{ij}^b = \tilde{\gamma}_{aj} \delta^b_i + \tilde{\gamma}_{ia} \delta^b_j - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \delta^b_a \quad (2.53)$$

$$\mathfrak{l}_{ija} = \left(\tilde{\gamma}_{kj} \tilde{\Gamma}^k_{ia} + \tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\Gamma}^k_{ja} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\Gamma}^k_{ka} \right) \quad (2.54)$$

$$\mathfrak{m}_{ij} = M_{ij} \quad (2.55)$$

gegeben. Die Koeffizienten von $(\tilde{\mathcal{L}}V)^{ij}$ sind in μ -Richtung bei $\mu = \pm 1$ nicht regulär, um diese Koordinatensingularität aufzufangen führen wir die Hilfsgröße \hat{V}^2 über

$$V^2 = (1 - \mu^2) \hat{V}^2 \quad (2.56)$$

ein. Da Aufgrund der Axialsymmetrie V^2 auf der Achse verschwindet, ist \hat{V}^2 dort endlich. Des Weiteren enthalten \hat{A}_{22} und \hat{A}^{33} Irregularitäten der Form $\propto 1/(1 - \mu^2)$, während die Komponenten \hat{A}^{22} und \hat{A}_{33} auf der Achse mit $\propto (1 - \mu^2)$ verschwinden. Die Struktur $\hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij}$, welche in der Koeffizientenfunktion H_8 enthalten ist, bleibt somit regulär. Bei der Vorberechnung der Koeffizientenfunktionen bestimmen wir die regulären Objekte $\hat{\mathfrak{k}}$, $\hat{\mathfrak{l}}$, $\hat{\mathfrak{m}}$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{k}}^{22b}_a &= (1 - \mu^2) \mathfrak{k}^{22b}_a & \hat{\mathfrak{k}}^{22b}_a &= \frac{1}{(1 - \mu^2)} \mathfrak{k}^{22b}_a & \hat{\mathfrak{k}}^{33b}_a &= (1 - \mu^2) \mathfrak{k}^{33b}_a \\ \hat{\mathfrak{l}}_{22a} &= (1 - \mu^2) \mathfrak{l}_{22a} & \hat{\mathfrak{l}}^{22}_a &= \frac{1}{(1 - \mu^2)} \mathfrak{l}^{22}_a & \hat{\mathfrak{l}}_{33a} &= \frac{1}{(1 - \mu^2)} \mathfrak{l}_{33a} & \hat{\mathfrak{l}}^{33}_a &= (1 - \mu^2) \mathfrak{l}^{33}_a \\ \hat{\mathfrak{m}}_{22} &= (1 - \mu^2) \mathfrak{m}_{22} & \hat{\mathfrak{m}}^{22} &= \frac{1}{(1 - \mu^2)} \mathfrak{m}^{22} & \hat{\mathfrak{m}}_{33} &= \frac{1}{(1 - \mu^2)} \mathfrak{m}_{33} & \hat{\mathfrak{m}}^{33} &= (1 - \mu^2) \mathfrak{m}^{33} \end{aligned}$$

Die Vektorzwangsbedingung ist

$$\mathfrak{a}^{irq}_p V^p_{,qr} + \mathfrak{b}^{iq}_p V^p_{,q} + \mathfrak{c}^i_p V^p + \mathfrak{d}^i + \mathfrak{e}^i \phi^6 = 0 \quad (2.57)$$

mit

$$\mathbf{a}^{irq}_p = \tilde{\gamma}^{qr} \delta_p^i + \frac{1}{6} \left(\tilde{\gamma}^{ir} \delta_p^q + \tilde{\gamma}^{iq} \delta_p^r \right) \quad (2.58)$$

$$\mathbf{b}^{iq}_p = \tilde{\gamma}^{iq} \tilde{\Gamma}_{jp}^j - \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^q \delta_p^i + \tilde{\gamma}^{jq} \tilde{\Gamma}_{jp}^i + \tilde{\gamma}^{qk} \tilde{\Gamma}_{kp}^i - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{iq} \tilde{\Gamma}_{kp}^k \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^i_p &= \tilde{\gamma}^{ik} \left(\tilde{\Gamma}_{kp,j}^j - \tilde{\Gamma}_{jk}^l \tilde{\Gamma}_{lp}^j + \tilde{\Gamma}_{jl}^j \tilde{\Gamma}_{kp}^l \right) \\ &\quad + \tilde{\gamma}^{jk} \left(\tilde{\Gamma}_{kp,j}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^l \tilde{\Gamma}_{lp}^i + \tilde{\Gamma}_{jl}^i \tilde{\Gamma}_{kp}^l \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$- \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \left(\tilde{\Gamma}_{kp,j}^k - \tilde{\Gamma}_{jk}^l \tilde{\Gamma}_{lp}^k + \tilde{\Gamma}_{jl}^k \tilde{\Gamma}_{kp}^l \right) \quad (2.61)$$

$$\mathbf{d}^i = \tilde{\nabla}_j M^{ij} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{e}^i = -\frac{2}{3\sigma^3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K. \quad (2.63)$$

Mit der obigen Setzung $V^2 = (1 - \mu^2) \hat{V}^2$ (2.56) verschwinden für den Index i alle Koeffizientenfunktionen auf der Achse. Damit entsteht dort eine numerisch nicht auswertbare Identität, dies wird durch die Hilfskoeffizienten $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{e}}$ behoben.

$$(\hat{\mathbf{a}}^{2rq}_p, \hat{\mathbf{b}}^{2q}_p, \hat{\mathbf{c}}^2_p, \hat{\mathbf{d}}^2, \hat{\mathbf{e}}^2) = \frac{1}{(1 - \mu^2)} (\mathbf{a}^{2rq}_p, \mathbf{b}^{2q}_p, \mathbf{c}^2_p, \mathbf{d}^2, \mathbf{e}^2)$$

Für die Koeffizientenfunktionen wählen wir die ungestörte Kerr-Lösung in hyperboloidaler ACMC-Blätterung mit dem konformen Faktor

$$\Omega_{\text{Kerr}} = \frac{\sigma}{4M}, \quad (2.64)$$

d. h. $\omega = \sigma$ und $\phi_{\text{Kerr}} = 2\sqrt{M}$. Die Koeffizientenfunktionen $H_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ können damit in Abhängigkeit des Parameters j berechnet werden. Alle Koeffizienten, insbesondere die \mathbf{e} , sind, aufgrund der ACMC-Bedingung, bei \mathcal{J}^+ regulär. Die Koeffizienten \mathbf{m}^{ij} werden aus der ungestörten Kerr-Lösung gewonnen, indem gefordert wird, dass

$V_{\text{Kerr}}^i = 0$ die Vektorzwangsbedingung erfüllt. Aus der Zerlegung der \hat{A}^{ij} (1.39) folgt somit

$$\mathbf{m}^{ij} = \hat{A}_{\text{Kerr}}^{ij}. \quad (2.65)$$

Für eine eindeutige Lösung der Zwangsbedingungen müssen Randbedingungen vorgeschrieben werden. Die Vektorzwangsbedingung ist ein System regulärer elliptischer Gleichungen, dies ermöglicht die Wahl von Dirichlet-Bedingungen für die Potentiale V^i bei \mathcal{J}^+ und am Horizont \mathcal{H} .

$$V^i \Big|_{\mathcal{J}^+} = 0 = V^i \Big|_{\mathcal{H}} \quad (2.66)$$



Diese Wahl ist kompatibel mit der ungestörten Lösung $V_{\text{Kerr}}^i = 0$. Eine andere Wahl der Randbedingungen ist möglich, solange diese mit der ungestörten Lösung kompatibel sind. Im Folgenden werden wir uns auf diese einfache Wahl beschränken, da wir die Störung über die Randbedingung in der Hamiltonzwangsbedingung modulieren werden.

Die Hamiltonzwangsbedingung erlaubt keine freie Wahl beider Randbedingungen, die Yamabe-artige Struktur der Gleichung fixiert ϕ bei \mathcal{J}^+ (1.36). In den gewählten Koordinaten ergibt sich

$$\phi \Big|_{\mathcal{J}^+} = \left[\sqrt[4]{9\tilde{\gamma}^{11}K^{-2}} \right]_{\mathcal{J}^+}. \quad (2.67)$$

Am inneren Rand \mathcal{H} fordern wir eine marginal auswärts gefangene Fläche (MOTS). Mit dieser Forderung wird sichergestellt, dass ein scheinbarer Horizont existiert und die Lösung Schwarze Löcher beschreibt. Aus der MOTS-Gleichung (1.57) erhalten wir eine Bedingung an ϕ und seine ersten Ableitungen, die Koeffizientenzerlegung ist

$$\left[\tilde{s}^a \phi_{,a} + \mathfrak{h}_1 \phi + \mathfrak{h}_2 \phi^3 + \mathfrak{h}_3 \phi^{-3} \right]_{\mathcal{H}} = 0. \quad (2.68)$$

Die zugehörigen Koeffizienten sind

$$\mathfrak{h}_1 = \frac{1}{4} \left(\tilde{\nabla}_a \tilde{s}^a - \frac{2}{\sigma} \tilde{s}^1 \right) \quad (2.69)$$

$$\mathfrak{h}_2 = \frac{K}{6\sigma} \quad (2.70)$$

$$\mathfrak{h}_3 = -\frac{\sigma^2}{4} \tilde{s}^a \tilde{s}^b \hat{A}_{ab}. \quad (2.71)$$

Der Normalenvektor des inneren Randes \tilde{s}^i ist

$$\tilde{s}_i = \left(-\frac{1}{\sqrt{\tilde{\gamma}^{\Pi\Pi}}}, 0, 0 \right) \quad \text{und} \quad \tilde{s}^i = \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{s}_j. \quad (2.72)$$

Die Konstruktion gestörter Schwarzer Löcher erfolgt durch die Forderung der inneren Randbedingung der Hamiltonzwangsbedingung (2.68) $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}$ an einer anderen Koordinatensphäre als dem Ereignishorizont der Kerr-Lösung $\sigma_h = \frac{2}{1+\sqrt{1-j^2}}$ (2.10). Das Newton-Raphson-Verfahren kann aus einer bekannten Startlösung, der Kerr-Lösung mit $\sigma_{\mathcal{H}} = \sigma_h$, gestörte Lösungen erzeugen. Diese gestörten Lösungen dienen wiederum als Startlösung für eine weitere Störung. Mit diesem schrittweisen Verfahren ist es möglich stark gestörte Schwarze Löcher zu erzeugen.

2.5. Numerische Ergebnisse

Bei vorgeschriebenem Drehimpulsparameter j der freien Daten erlaubt das Verfahren die Konstruktion von Anfangsdaten gestörter Objekte. Die Störung wird durch die Koordinatenposition der inneren Randbedingung $\sigma_{\mathcal{H}}$ beschrieben. Um die Abweichung zwischen gestörter und ungestörter Lösung abschätzen zu können, wird der Störparameter

$$\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = \sigma_{\mathcal{H}} - \sigma_{\text{h}} \quad (2.73)$$

eingeführt. Für die in Tabelle 2.1 dargestellten Werte wurden Beispiellösungen bestimmt. Das Verfahren kann ohne Probleme Anfangsdaten für $|j| < 1$, und beliebig nahe am extremen Fall, konstruieren.

Für die Parameterwahl $j = 0.5$, $\sigma_{\mathcal{H}} = 0.5$ ($\Delta\sigma_{\mathcal{H}} \approx -0.57$) sind in Abbildung 2.2 die gelösten Potentiale (ϕ, V^1, V^2, V^3) dargestellt. Diese Anfangsdaten entsprechen einer starken Störung, da der physikalische Koordinatenradius des Objektes aufgrund von $r_{\mathcal{H}} = 2M/\sigma_{\mathcal{H}} \approx 2.14r_h$ ungefähr verdoppelt wurde. Eine Änderung des Vorzeichens von $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ ändert die Abweichung der Lösung von der ungestörten Lösung $\phi_{\text{Kerr}}/\sqrt{M} = 2$ und $V^i/M^2 = 0$.

Für alle Lösungen finden wir einen schnellen, exponentiellen Abfall der Chebyshev-Koeffizienten bis fast auf Maschinengenauigkeit. Des Weiteren konnten wir eine exponentielle Konvergenz der Lösungen beobachten. Um dies zu quantifizieren betrachten wir die Größen

$$D_{n_{\sigma}, n_{\mu}}^{\phi} = M^{-1/2} \sup_{\sigma, \mu} |\phi_{n_{\sigma}, n_{\mu}} - \phi_{60, 30}| \quad (2.74)$$

$$D_{n_{\sigma}, n_{\mu}}^i = M^{-2} \sup_{\sigma, \mu} |V_{n_{\sigma}, n_{\mu}}^i - V_{60, 30}^i|. \quad (2.75)$$

Nr.	j	σ_{h}
1	0.5	1.0718
2	0.9	1.3929
3	0.999	1.9144

Tabelle 2.1.: Beispiele für konstruierte Anfangsdaten.

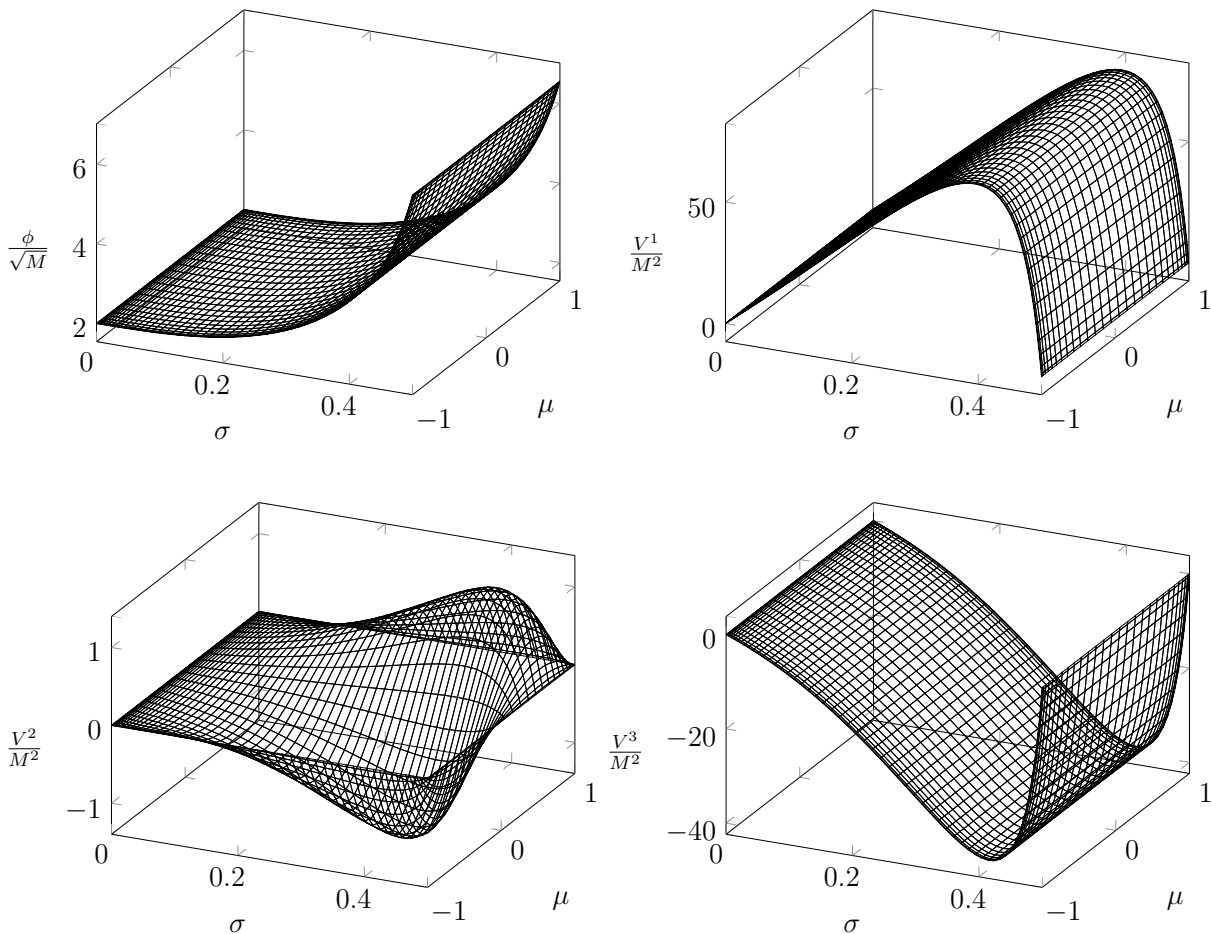
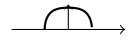


Abbildung 2.2.: Die gelösten Potentiale (ϕ, V^1, V^2, V^3) für den Fall $j = 0.5$, $\sigma_{\mathcal{H}} = 0.5$.

Die $D_{n_\sigma, n_\mu}^{\{\phi, 1, 2, 3\}}$ beschreiben die maximale Abweichung einer Lösung mit (n_σ, n_μ) Gitterpunkten von einer hochpräzisen Referenzlösung mit $(n_\sigma, n_\mu) = (60, 30)$ Gitterpunkten. Zur Näherung des Supremums über alle $\sigma \in [0, \sigma_{\mathcal{H}}]$ und $\mu \in [-1, 1]$ werden die Potentiale auf einem äquidistanten Gitter mit 500×500 Gitterpunkten, durch pseudospektrale Interpolation, ausgewertet. Für die in Tabelle 2.1 vorgestellten Rechnungen sind die Abweichungen $D_{n_\sigma, n_\mu}^{\{\phi, 1, 2, 3\}}$ in Abbildung 2.3 dargestellt.

Die in den Grafiken sichtbare exponentielle Konvergenz bis fast auf Maschinengenauigkeit ist ein starkes Indiz dafür, dass die Lösungen analytisch sind. Dieses Verhalten unterstützt die Vermutung aus Abschnitt 1.1.5, dass die Regularitätsbedingung (1.47) für die CMC-Blätterung auf die APMC-Blätterung übertragen werden kann. Die Existenz logarithmischer Terme würde durch eine Konvergenz der Lösungen, welche einem Potenzgesetz folgt, sichtbar.

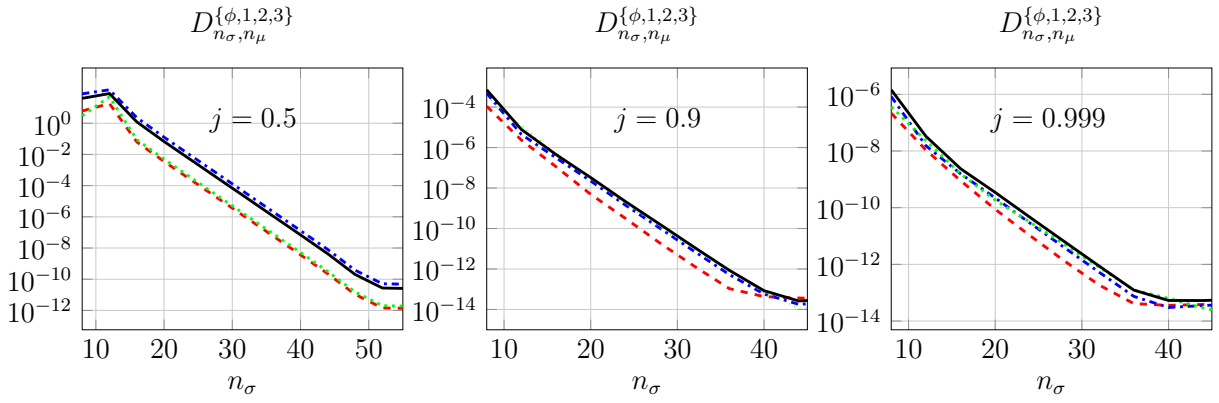


Abbildung 2.3.: Die maximalen Abweichungen $D_{n_\sigma, n_\mu}^{\{\phi, 1, 2, 3\}}$ (2.74, 2.75) über $n_\sigma = 2n_\mu$.

D_{n_σ, n_μ}^ϕ (rot, Striche), D_{n_σ, n_μ}^1 (blau, Strich-Punkte), D_{n_σ, n_μ}^2 (grün, Punkte), D_{n_σ, n_μ}^3 (schwarz, durchgezogen)

Die Konvergenz einer solchen Lösung mit nichtregulären Termen ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Für diese Konfiguration wurde die aus der Regularitätsbedingung (1.47) folgende Bedingung an die ACMC-Transformationsfunktion (2.19) verletzt, indem

$$0 \neq A_{,\mu}|_{\mathcal{S}^+} = \frac{1}{10} \quad (2.76)$$

gesetzt wurde. Die Residuen des Newton-Raphson-Verfahrens konvergieren auch in diesem Fall schnell bis zur Sättigung. Die Abweichungen $D_{n_\sigma, n_\mu}^{\{\phi, 1, 2, 3\}}$ folgen jedoch einem Potenzgesetz, als Referenzlösung wurde hier eine Lösung mit $(n_\sigma, n_\mu) = (140, 70)$ Gitterpunkten gewählt. Die linke Grafik in Abbildung 2.4 zeigt die Konvergenz der $D_{n_\sigma, n_\mu}^{\{\phi, 1, 2, 3\}}$ wie in Abbildung 2.3 in einer einfach logarithmischen Darstellung. Die rechte Grafik zeigt dieselben Daten in einer doppelt logarithmischen Darstellung, darin wird die einem Potenzgesetz folgende Konvergenz deutlich. Dies ist ein Zeichen für logarithmische Terme in den Lösungen.

Diese Betrachtung zeigt, dass eine Verletzung der Regularitätsbedingung (1.47) zu Lösungen mit logarithmischen Termen führt, die in Abbildung 2.4 deutlich erkennbar sind. Da in Abbildung 2.3 ein solches Verhalten nicht sichtbar ist, sehen wir dies als Bestätigung der Regularität der Lösungen und der Vermutung der Anwendbarkeit der Regularitätsbedingung.

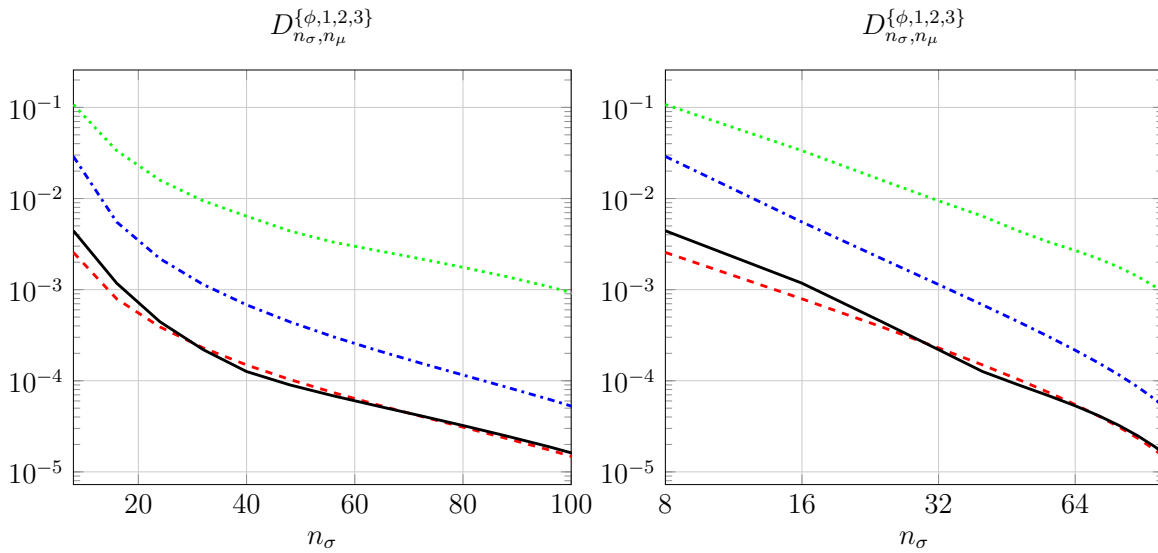


Abbildung 2.4.: Die maximalen Abweichungen D_{n_σ, n_μ}^ϕ (rot, Striche), D_{n_σ, n_μ}^1 (blau, Strich-Punkte), D_{n_σ, n_μ}^2 (grün, Punkte), D_{n_σ, n_μ}^3 (schwarz, durchgezogen) über $n_\sigma = 2n_\mu$ für eine Lösung mit logarithmischen Termen. Die Abweichung wurde zu einer Referenz mit $(n_\sigma, n_\mu) = (140, 70)$ Gitterpunkten bestimmt. Die linke Grafik zeigt die einfach logarithmische Darstellung wie in Abbildung 2.3, während die rechte Grafik, in der doppelt logarithmischen Darstellung, die einem Potenzgesetz folgende Konvergenz verdeutlicht.

2.6. Diskussion der Anfangsdaten

2.6.1. Marginal gefangene Flächen

Wie in Abschnitt 2.4 diskutiert, wird am inneren Rand des Gebietes für die Hamiltonzwangsbedingung eine marginal auswärts gefangene Fläche (MOTS) gefordert

$$\Theta_+|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (2.77)$$

In Abschnitt 1.2 wurde gezeigt, dass die Lösung der Hamiltonzwangsbedingung bei \mathcal{I}^+ die Bedingung an eine marginal inwärts gefangene Fläche (MITS) erfüllt.

$$\Theta_-|_{\mathcal{I}^+} = 0 \quad (2.78)$$

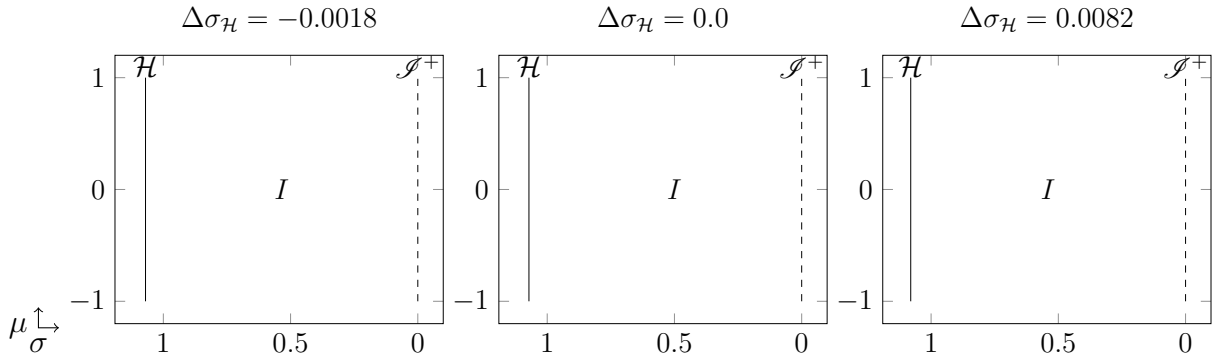


Abbildung 2.5.: Marginal gefangene Flächen für kleine Störungen. MOTS sind durchgezogene Linien und MITS gestrichelte Linien. Die Grafiken bestätigen das erwartete Verhalten für kleine Störungen um die Kerr-Lösung, es gibt außer der MITS \mathcal{J}^+ und der vorgeschriebenen MOTS keine weiteren marginal gefangenen Flächen. Das gekennzeichnete Gebiet I ist im Text erläutert. Der Rotationsparameter der freien Daten ist $j = 0.5$, die Koordinatensphären des Inneren Randes liegen von links nach rechts bei $\sigma_{\mathcal{H}} = \{1.0700, 1.0718, 1.0800\}$, aufgrund der kleinen Störung sind die Grafiken sehr ähnlich. Das Koordinatenkreuz gilt für alle drei Grafiken.

Im ungestörten Fall existieren zwischen \mathcal{J}^+ und dem Horizont \mathcal{H} , d. h. innerhalb des Gebietes $\overset{\circ}{\Sigma}_{\tau} = \Sigma_{\tau} \setminus \partial\Sigma_{\tau}$, keine weiteren marginal gefangenen Flächen.

$$\Theta_- \Theta_+|_{\overset{\circ}{\Sigma}_{\tau} \text{ Kerr}} \neq 0 \quad (2.79)$$

Insbesondere ist somit die vorgeschriebene marginal gefangene Fläche der scheinbare Horizont. Kleine Störungen um die Kerr-Lösungen, d. h. $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} \gtrsim 0$ bzw. $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} \lesssim 0$, erhalten diese Eigenschaft [68, 79]. Bei starken Störungen ist jedoch zu erwarten, dass sich innerhalb des Gebietes weitere MITS & MOTS ausbilden können. Die vorgeschriebene MOTS ist dann auch nicht mehr zwangsweise der scheinbare Horizont, sondern eine neue Fläche innerhalb des Gebietes übernimmt diese Position.

Eine ausführliche Untersuchung dieses Verhaltens wurde mit dem in Abschnitt 1.3.3 vorgestelltem Horizontfinder vorgenommen. Am Beispiel des Rotationsparameters $j = 0.5$ zeigt Abbildung 2.5 die marginal gefangenen Flächen für kleine Störungen. Dies sind Ergebnisse des Horizontfinders und bestätigen die Erwartung, dass für kleine Störungen um die Kerr-Lösung die vorgeschriebene marginal auswärts gefangene Fläche der scheinbare

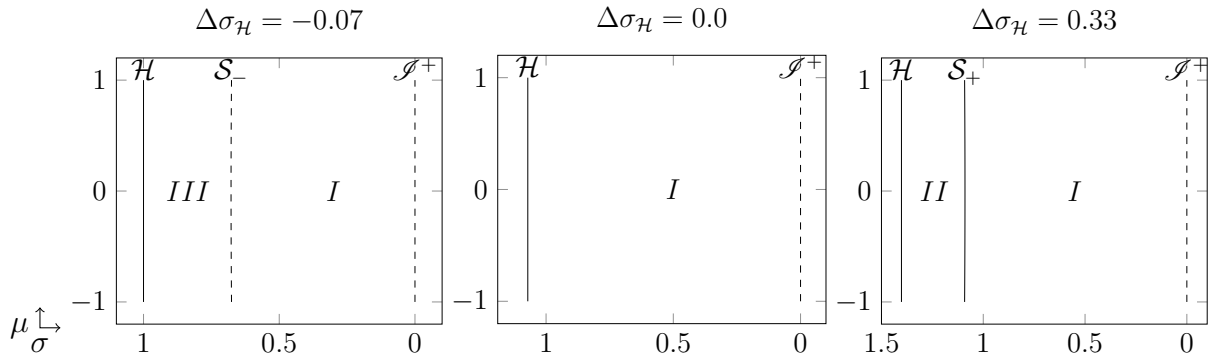
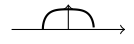


Abbildung 2.6.: Marginal gefangene Flächen für große Störungen. MOTS sind durchgezogene Linien und MITS gestrichelte Linien. Starke Störungen in negativer Richtung ($\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < 0$) führen zur Ausbildung einer MITS \mathcal{S}_- , abseits von \mathcal{J}^+ . Starke Störungen in positiver Richtung ($\Delta\sigma_{\mathcal{H}} > 0$) führen hingegen zur Ausbildung eines scheinbaren Horizontes \mathcal{S}_+ welcher nicht mehr mit der vorgeschriebenen MOTS \mathcal{H} übereinstimmt. Die gefundenen Flächen \mathcal{S}_+ und \mathcal{S}_- sind sehr schwach von μ abhängig, Abbildung 2.7 zeigt eine Vergrößerung der Flächen. Die gekennzeichneten Gebiete I , II , III sind im Text und Tabelle 2.2 erläutert. Der Rotationsparameter der freien Daten ist $j = 0.5$, die Koordinatensphären des Inneren Randes liegen von links nach rechts bei $\sigma_{\mathcal{H}} = \{1.0018, 1.0718, 1.4018\}$. Das Koordinatenkreuz gilt für alle drei Grafiken.

Horizont bleibt. Des Weiteren bilden sich keine zusätzlichen marginal inwärts gefangenen Flächen innerhalb des Gebietes. Für die in Abbildung 2.6 gezeigten Beispiele großer Störungen gilt dies nicht mehr. Innerhalb des Gebietes entstehen Flächen mit $\Theta_+\Theta_- = 0$.

Die linke Grafik von Abbildung 2.6 stellt den Fall einer starken Störung in negativer Richtung dar, der innere Rand \mathcal{H} wurde im Vergleich zur ungestörten Lösung an einer kleineren Koordinatenposition gefordert $\sigma_{\mathcal{H}} < \sigma_h$ ($\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < 0$). Dies entspricht wegen $r_{\mathcal{H}} = 2M/\sigma_{\mathcal{H}}$ einem größeren Koordinatenradius des Objektes. Die vorgeschriebene MOTS ist in diesem Fall weiterhin die einzige Fläche im Gebiet mit $\Theta_+ = 0$, es hat sich jedoch außerhalb von \mathcal{J}^+ eine weitere Fläche \mathcal{S}_- mit $\Theta_- = 0$ ausgebildet. Die sehr schwache μ -Abhängigkeit von \mathcal{S}_- ist in der linken Grafik von Abbildung 2.7 vergrößert dargestellt.

In der rechten Grafik von Abbildung 2.6 ist eine starke Störung in positiver Richtung dargestellt, d. h. der innere Rand \mathcal{H} wurde an einer, im Vergleich zur ungestörten Lösung,

größeren Koordinatenposition gefordert $\sigma_{\mathcal{H}} > \sigma_{\text{h}}$ ($\Delta\sigma_{\mathcal{H}} > 0$). Dies entspricht analog einem Objekt mit kleinerem Koordinatenradius. Bei dieser Störung bleibt \mathcal{J}^+ die einzige Fläche im Gebiet mit $\Theta_- = 0$. Die innere MOTS \mathcal{H} ist allerdings nicht mehr der scheinbare Horizont, da eine neue MOTS \mathcal{S}_+ mit $\Theta_+ = 0$ weiter außen existiert, der neue scheinbare Horizont. Die hier ebenfalls sehr schwache μ -Abhängigkeit von \mathcal{S}_+ ist in Abbildung 2.7 vergrößert worden.

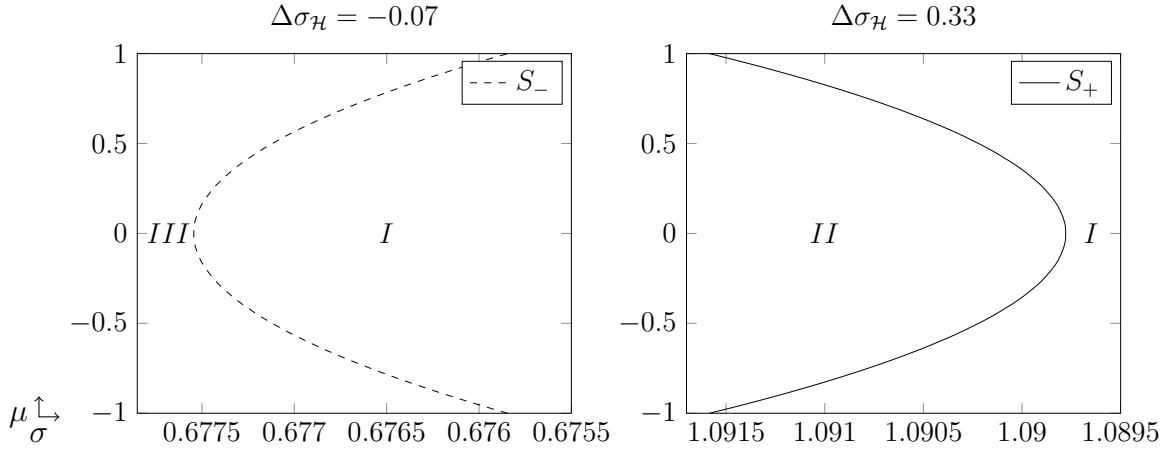
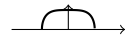


Abbildung 2.7.: Vergrößerung der linken und rechten Grafiken von Abbildung 2.6. Die μ -Abhängigkeit der gefangenen Flächen \mathcal{S}_- und \mathcal{S}_+ ist deutlich zu erkennen. Das Koordinatenkreuz gilt für beide Grafiken.

Für einen Satz von freien Daten $\tilde{\gamma}_{ij}$, K , M^{ij} eines Kerrschen Schwarzen Loches mit fixiertem j gibt es einen kritischen Störparameter $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ bei dem die MOTS \mathcal{S}_+ exakt mit der vorgeschriebenen MOTS \mathcal{H} übereinstimmt. Für $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ existiert keine Fläche \mathcal{S}_+ , wird eine größere Störung $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} > \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ gewählt ist die nun innerhalb des Gebiet liegende MOTS \mathcal{S}_+ der scheinbare Horizont. Analog dazu gibt es ein kritische Störung $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III}$ so, dass für $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III}$ ($\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III}$ ist negativ) eine MOTS \mathcal{S}_- existiert, die vollständig im Gebiet liegt und den inneren Rand \mathcal{H} berührt. Für Störparameter $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}} < 0$ existiert kein \mathcal{S}_- , oder \mathcal{S}_- wandert in das Gebiet und schneidet den inneren Rand \mathcal{H} . Für $j = 0.5$ finden wir $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II} \approx 0.07$ und $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III} \approx -0.03$.

Aus den obigen Betrachtungen lassen sich anhand der Vorzeichen von Θ_{\pm} drei Gebiete charakterisieren. Gebiet I enthält als äußere Grenze \mathcal{J}^+ , auslaufende Nullgeodäten divergieren und einlaufend konvergieren. Gebiet II in Tabelle 2.2 wird als zukünftig gefangenes Gebiet (future trapped domain) bezeichnet, da sowohl einlaufende als auch auslaufende



Nullgeodäten konvergieren [64]. Für die Untersuchung von Daten außerhalb Schwarzer Löcher ist es deswegen ausreichend, das Gebiet auf $[\mathcal{S}_+, \mathcal{I}^+]$ zu beschränken und \mathcal{S}_+ als inneren Rand bei Störungen $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} > \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ zu betrachten.

Gebiet *III* ist ein vergangen gefangenes Gebiet (past trapped domain), d. h. sowohl einlaufende als auch auslaufende Nullgeodäten divergieren. Dies entspricht der lokalen Charakterisierung für ein Weißes Loch. Insbesondere gilt $\Theta_- = 0$, $\Theta_+ > 0$ und $\delta_+\Theta_- < 0$ (d. h. das Vorzeichen von Θ_- wechselt von positiv nach negativ beim Wechsel von Gebiet *III* nach *I*, entsprechend der oberen Grafik in Abbildung 2.8). Im quasi-lokalen Horizontformalismus von HAYWARD [80] heißt dies, dass \mathcal{S}_- Teil eines „past outer trapping“ Horizontes ist, einem Weißen Loch. Für die Untersuchung astrophysikalischer Phänomene müssen Daten mit $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III}$ verworfen werden, da es kein realistisches physikalisches Szenario gibt, welches zur Entstehung Weißer Löcher führt. Diese Daten können jedoch für eine Stabilitätsanalyse der Kerr-Lösung interessant sein, da sie Zugang zu einem gestörten Weißen Loch bieten. Insbesondere ist es mit Daten, welche das Gebiet *III* enthalten, möglich, die Bifurkation zwischen Schwarzem und Weißem Loch zu studieren.

Abbildung 2.9 illustriert in der Kerr-Raumzeit hyperboloidale Blätter mit denselben auftretenden marginal gefangenen Flächen. Das durch die blaue/mittlere Linie beschriebene Blatt enthält nur die MITS \mathcal{I}^+ und den äußeren zukünftigen Horizont $\mathcal{H}_+^{f/o}$ (future/outer), für Daten mit kleinen Störungen $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III}$ finden wir dieselbe Struktur. Das Blatt der grünen/oberen Linie enthält am äußeren Rand die MITS \mathcal{I}^+ und am inneren Rand den inneren zukünftigen Horizont $\mathcal{H}_+^{f/i}$ (future/inner), des Weiteren ist innerhalb des Gebietes mit $\mathcal{H}_+^{f/o}$ eine weitere MOTS. Diese Struktur der marginal gefangenen Flächen wurde für starke positive Störungen $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ gefunden. Die rote/untere Li-

Gebiet	Θ_+	Θ_-
<i>I</i>	$\Theta_+ > 0$	$\Theta_- < 0$
<i>II</i>	$\Theta_+ < 0$	$\Theta_- < 0$
<i>III</i>	$\Theta_+ > 0$	$\Theta_- > 0$

Tabelle 2.2.: Übersicht über die durch das Vorzeichen von Θ_{\pm} charakterisierten Gebiete.

Ein mögliches Gebiet *IV* mit $\Theta_+ < 0$ und $\Theta_- > 0$ wurde nicht beobachtet.

nie beschreibt ein Blatt, welches am äußeren Rand die MITS \mathcal{J}^+ enthält und am inneren Rand $\mathcal{H}_+^{\text{past}}$. Dazwischen befindet sich die MITS $\mathcal{H}_-^{\text{past}}$. Diese Konfiguration beschreibt ein Weißes Loch und wurde ebenfalls für starke negative Störungen $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{\text{III}}$ gefunden. Das Diagramm in Abbildung 2.9 dient nicht der Darstellung der dynamischen Änderung des Störparameters, sondern zeigt nur für die gefundene Typisierung der Anfangsdaten aus Tabelle 2.2 die entsprechenden Blätter in der Kerr-Lösung.

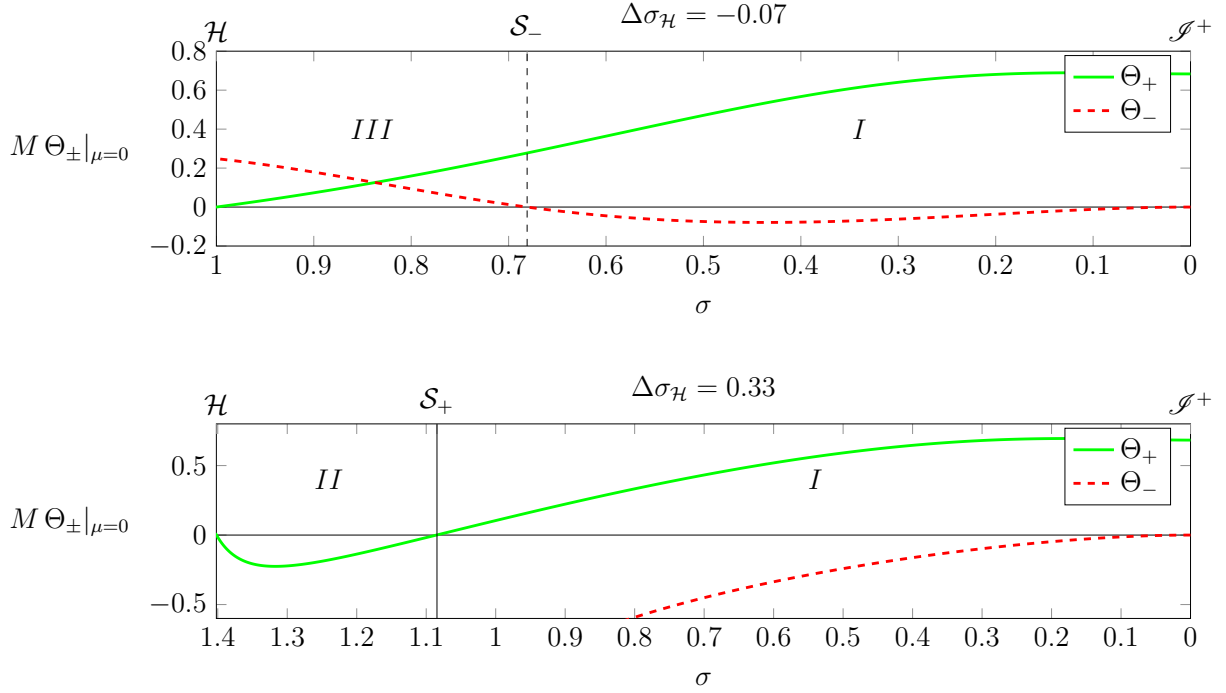


Abbildung 2.8.: Äquatorialer Schnitt der Expansionen Θ_{\pm} für die Koordinatensphären $\sigma = \text{konst.}$ Die obere Grafik zeigt eine starke negative Störung $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = -0.07$ (vgl. linke Grafik in den Abbildungen 2.6 und 2.7). Die untere Grafik zeigt das Ergebnis einer starken positiven Störung $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = 0.33$. (vgl. rechte Grafik in den Abbildungen 2.6 und 2.7). Die Flächen \mathcal{S}_{\pm} sind vom Horizontfinder gefundene zusätzliche gefangene Flächen mit $\Theta_{\pm} = 0$, diese sind bis auf eine relative Abweichungen von $\approx 10^{-2}$ Koordinatensphären. Die Gebiete $I - III$ sind im Text und Tabelle 2.2 erläutert.

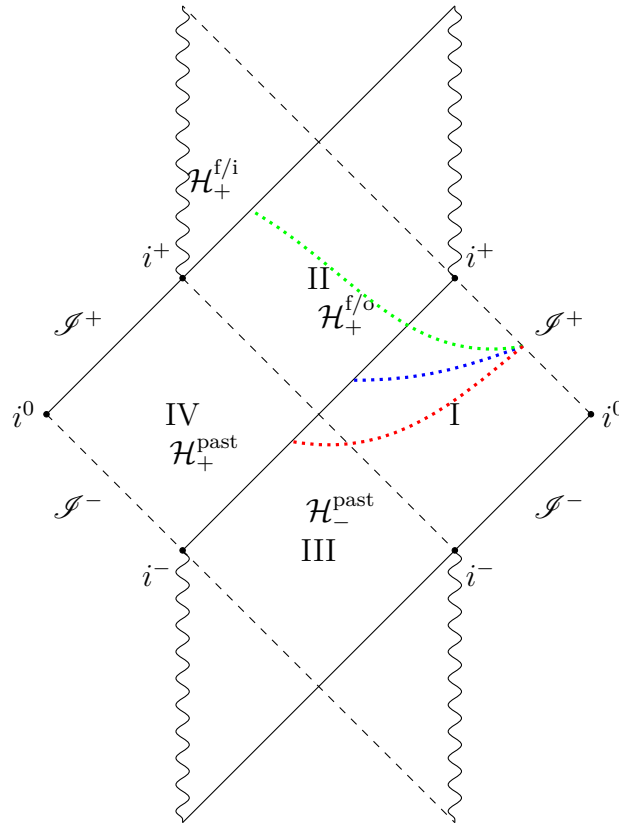


Abbildung 2.9.: Illustration der Blätterung in der Kerr-Lösung mit derselben Struktur marginal gefangener Flächen wie die erzeugten Anfangsdaten. Gestrichelte Linien sind MITS, durchgezogene Linien MOTS und die Gepunkteten Linien die schematisch eingezeichneten Blätter. Das grüne (obere) Blatt enthält eine MOTS im Gebiet, wie auch Daten mit $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}$. Das blaue (mittlere) Blatt enthält außerhalb der Ränder keine marginal gefangenen Flächen, dies ist auch für Anfangsdaten mit $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III}$ der Fall. Das rote (untere) Blatt enthält im Gebiet eine MITS, dies wurde für Anfangsdaten mit $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III}$ beobachtet. Die nummerierten Gebiete entsprechen denen in Tabelle [2.2](#).

2.6.2. Analyse der Multipole

Für die in Abschnitt [2.4](#) konstruierten Anfangsdaten stellt sich prinzipiell die Frage, ob es sich bei den Daten um gestörte Schwarze Löcher handelt oder um ungestörte Kerrsche Schwarze Löcher in neuen Koordinaten [\[81\]](#). Die Diskussion der marginal gefangenen Flächen in Abschnitt [2.6.1](#) lässt vermuten, dass gestörte Objekte konstruiert wurden.

Im Folgenden soll dies mittels einer Multipolanalyse des scheinbaren Horizontes¹ $\hat{\mathcal{H}}$ untersucht werden. Die in [82] vorgestellten Multipole isolierter Horizonte charakterisieren diese vollständig durch Massenmultipole M_n und Drehimpulsmultipole J_n . Dies erlaubt eine invariante Untersuchung der Fragestellung, ob es sich bei den konstruierten Anfangsdaten tatsächlich um gestörte Schwarze Löcher handelt.

Im Rahmen der numerischen Evolution wurden diese Multipole erstmals verwendet, um festzustellen, ob gestörte Schwarze Löcher zu Kerrschen Schwarzen Löchern konvergieren [83].

Für eine eichunabhängige Definition der Multipole ist ein axialsymmetrischer Horizont $\hat{\mathcal{H}}$ notwendig. Die axiale Symmetrie Φ^i ist durch den axialen Killingvektor $(\partial_\varphi)^i$ gegeben. Auf dem Horizont $\hat{\mathcal{H}}$ wird ein neues Koordinatensystem $\{\hat{\mu}, \hat{\varphi}\}$ eingeführt, so dass die Legendrepolynome $P_n(\hat{\mu})$ orthonormal sind. In diesem Fall stimmt die Koordinate φ mit dem affinen Parameter $\hat{\varphi} \in [0, 2\pi)$ der Symmetrie Φ^i überein [82, 83]. Weiterhin ist $\hat{\mu}$ durch

$$\partial_i \hat{\mu} = \frac{1}{R_{\hat{\mathcal{H}}}^2} {}^{(2)}\epsilon_{ji} \Phi^j \quad (2.80)$$

definiert. Hier ist ${}^{(2)}\epsilon_{ji}$ das Flächenelement auf $\hat{\mathcal{H}}$ und $R_{\hat{\mathcal{H}}}$ ist der durch die Fläche definierte Radius von $\hat{\mathcal{H}}$.

$$\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{H}}} = \oint_{\hat{\mathcal{H}}} dA = 4\pi R_{\hat{\mathcal{H}}}^2 \quad (2.81)$$

Die in Gleichung (2.80) auftretende Integrationskonstante wird durch die Forderung

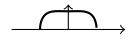
$$\oint_{\hat{\mathcal{H}}} \hat{\mu} dA = 0 \quad (2.82)$$

fixiert. Mit diesen Betrachtungen sind die Multipole des scheinbaren Horizontes $\hat{\mathcal{H}}$ durch

$$J_n = \frac{R_{\hat{\mathcal{H}}}^{n-1}}{8\pi} \oint_{\hat{\mathcal{H}}} K_{\Phi^s}(\mu) P'_n(\hat{\mu}(\mu)) dA \quad (2.83)$$

$$M_n = M_{\hat{\mathcal{H}}} \frac{R_{\hat{\mathcal{H}}}^n}{8\pi} \oint_{\hat{\mathcal{H}}} {}^{(2)}R(\mu) P_n(\hat{\mu}(\mu)) dA \quad (2.84)$$

¹Entsprechend der Diskussion in Abschnitt 2.6.1 ist für kleine Störungen die vorgeschriebene MOTS \mathcal{H} der scheinbare Horizont, bei stärkeren Störungen bildet sich eine neue MOTS \mathcal{S}_+ , welche den scheinbaren Horizont bildet. Im Folgenden soll der scheinbare Horizont vereinigend als $\hat{\mathcal{H}}$ bezeichnet werden.



gegeben. In Gleichung (2.83) wurde die Abkürzung

$$K_{\Phi s} = K_{ji} \Phi^i s^j \quad (2.85)$$

eingeführt, dabei ist s^i der Normalenvektor des scheinbaren Horizontes $\hat{\mathcal{H}}$ in der Blätterung. Der Normalenvektor $s^i = \Omega \tilde{s}^i$ ist als Lösung des Horizontfinders gegeben, mit der Zerlegung der äußeren Krümmung (1.26, 1.30) in $K_{ij} = \Omega \hat{A}_{ij} + \frac{1}{3} \Omega^{-2} \tilde{\gamma}_{ij} K$ folgt

$$K_{\Phi s} = \left(\Omega^2 \hat{A}_{ij} + \frac{1}{3} \Omega^{-1} \tilde{\gamma}_{ij} K \right) \delta_3^i \tilde{s}^j \quad (2.86)$$

$$= \left(\Omega^2 \hat{A}_{3j} + \frac{1}{3} \Omega^{-1} \tilde{\gamma}_{3j} K \right) \tilde{s}^j \quad (2.87)$$

mit $\hat{A}_{ij} = (\tilde{\mathcal{L}}V)^{ij} + M^{ij}$ (1.39).

Ableitungen der Legendrepolynome $P_n(\hat{\mu})$ in Gleichung (2.83) werden bezüglich ihres Argumentes $\hat{\mu}$ bestimmt. Bei ${}^{(2)}R(\mu)$ handelt es sich um den zweidimensionalen Ricciskalar von $\hat{\mathcal{H}}$. $M_{\hat{\mathcal{H}}}$ ist durch die Masse eines Kerrschen Schwarzen Loches gegeben.

$$M_{\hat{\mathcal{H}}} = \sqrt{\left(\frac{R_{\hat{\mathcal{H}}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{J_1}{R_{\hat{\mathcal{H}}}} \right)^2} \quad (2.88)$$

Mit dem Gauß-Bonnet-Theorem folgt $M_0 = M_{\hat{\mathcal{H}}}$, außerdem gilt $M_1 = 0$ [82, 84]. Der Multipol J_0 verschwindet, während J_1 der Definition des Komar-Drehimpulses des scheinbaren Horizontes $\hat{\mathcal{H}}$ entspricht. Der Drehimpuls des gestörten Kerrschen Schwarzen Loches ist $J = J_1$.

Aufgrund der Äquatorialsymmetrie der konstruierten Anfangsdaten verschwinden die ungeraden Massenmultipole und die geraden Drehimpulsmultipole.

$$M_{2n+1} = 0 \quad J_{2n} = 0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.89)$$

Für die konstruierten Anfangsdaten werden mit den Gleichungen (2.83) und (2.84) die Multipole am scheinbaren Horizont $\hat{\mathcal{H}}$ ausgewertet und mit denen eines Kerrschen Schwarzen Loches verglichen, welches dieselbe Masse M_0 und denselben Drehimpuls J_1 besitzt. Die Differenz der höheren Multipole zur Kerr-Lösung ist dann ein Maß für die Abweichung von derselben. Da die Multipole von der Dimension $[\text{Masse}]^{n+1}$ sind, betrachten wir die normalisierten, dimensionslosen Größen J_n/M_0^{n+1} und M_n/M_0^{n+1} .

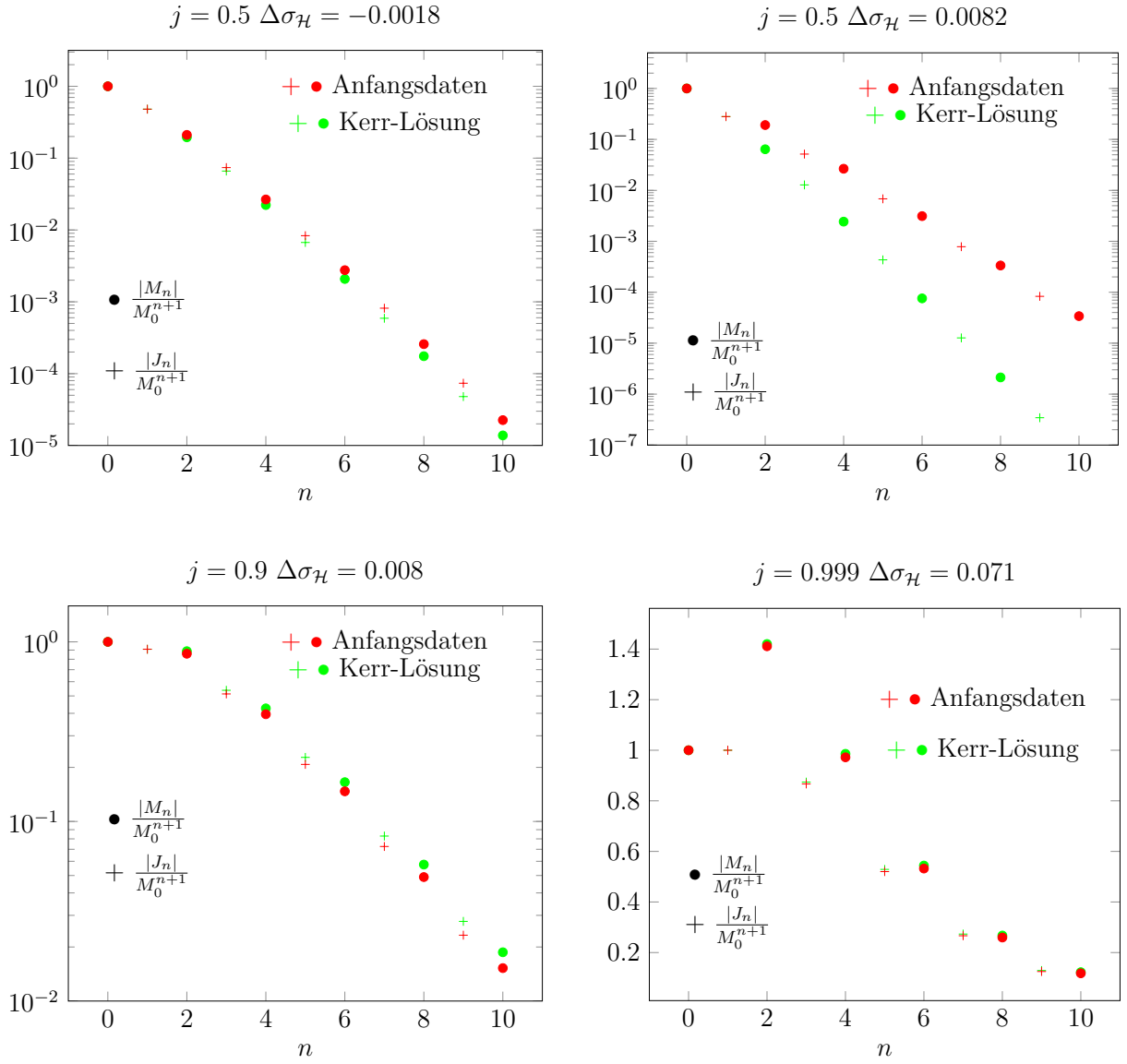


Abbildung 2.10.: Massen- und Drehimpulsmultipole am scheinbaren Horizont der konstruierten Anfangsdaten mit $j = 0.5$, $j = 0.9$, $j = 0.999$. Die obere linke und obere rechte Grafik zeigt dieselben Anfangsdaten wie in der linken und rechten Grafik in Abbildung 2.5. Die grünen Werte entsprechen den Multipolen einer Kerr-Lösung mit denselben M_0 und J_1 , die Abweichung der höheren Multipole zeigt, dass es sich bei den konstruierten Daten nicht um die Kerr-Lösung handelt.

Abbildung 2.10 zeigt für konstruierte Anfangsdaten die Abweichung der Multipole am scheinbaren Horizont von denen einer Kerr-Lösung mit demselben M_0 und J_0 . In Abbildung 2.11 sind für $j = 0.5$ die Abweichung der Multipole M_2 , J_3 , M_4 und J_5 über dem Störparameter skizziert. Die Abweichung verschwindet nur für $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = 0$. Dies zeigt

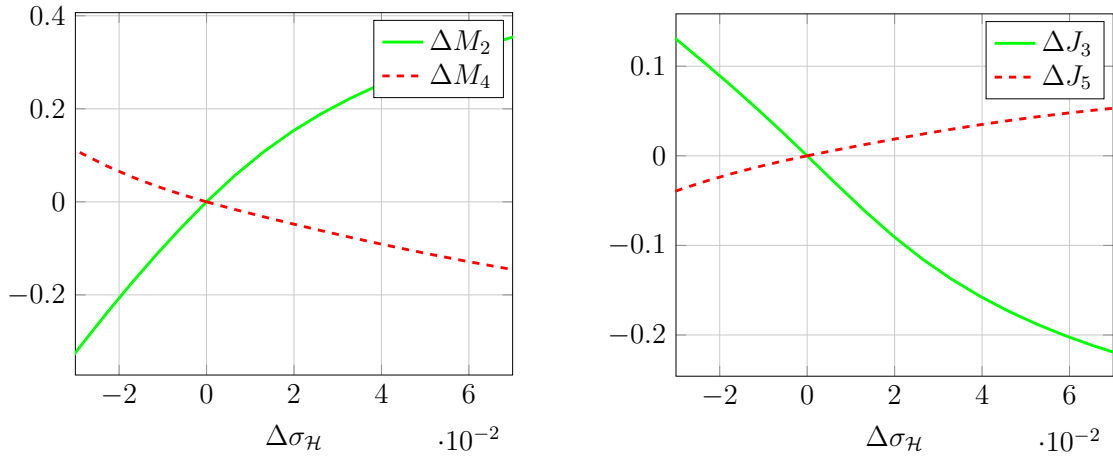


Abbildung 2.11.: Differenz der Multipoles über dem Störparameter $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ für Anfangsdaten mit $j = 0.5$.

deutlich, dass es sich bei den konstruierten Daten um gestörte Kerrsche Schwarze Löcher handelt und nicht um Kerrsche Schwarze Löcher in anderen Koordinaten.

2.6.3. Bondi-Masse

Die Anfangsdaten wurden auf dem hyperboloidalen Blatt Σ_τ bestimmt. Auf diesem Blatt kann die bei i^0 definierte ADM-Masse nicht ermittelt werden. Die in dem Blatt enthaltene Energie lässt sich in diesem Fall durch die Bondi-Masse ausdrücken [8]. Zur Bestimmung der Bondi-Masse nutzen wir, dass die Hawking-Masse bei \mathcal{I}^+ der Bondi-Masse entspricht [85–88].

$$M_B = M_H|_{\mathcal{I}^+} \quad (2.90)$$

Die Hawking-Masse M_H einer geschlossenen zweidimensionalen Fläche \mathcal{S} ist durch

$$M_H = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{S}}}{16\pi}} \left[1 + \frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{S}} \Theta_+ \Theta_- dA \right] \quad (2.91)$$

definiert. Der Flächeninhalt von \mathcal{S} ist durch $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, analog zu (2.81), gegeben. Die Expansion aus- und einlaufender Nullgeodäten wird durch Θ_{\pm} beschrieben (siehe Abschnitt 1.2). Die Bildung des Grenzwertes der Hawking-Masse (2.91) nach \mathcal{I}^+ bedarf einer genauen Analyse, da im Grenzwert $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{I}^+} = \mathcal{A}_{\mathcal{I}^+} \rightarrow \infty$ und $\Theta_-|_{\mathcal{I}^+} = 0$ gilt.

Für die Auswertung des Integranden in Gleichung (2.91) wird die Reihenentwicklung von ϕ in der Hamiltonzwangsbedingung (1.35) benötigt. Die ersten drei Glieder der Taylor-

reihe lassen sich a priori bestimmen (siehe [1.1.4](#)). In der gewählten konformen transversal spurfreien Aufspaltung sind die Taylorglieder unabhängig von der Wahl der inneren Randbedingung. Da die ungestörte Lösung $\phi_{Kerr} = 2\sqrt{M}$ ist, folgt

$$\phi = \phi_0 + \sigma^3 \phi_3(\sigma, \mu), \quad (2.92)$$

d. h. insbesondere $\phi_{,\mu}|_{\mathcal{J}^+} = 0$ und $\phi_{,\sigma}|_{\mathcal{J}^+} = 0$. Mit der Wahl $\omega = \sigma$, ergibt sich für ϕ_0

$$\phi_0 = \sqrt[4]{9 \left(\frac{\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega}{K^2} \right)_{\mathcal{J}^+}} = \sqrt[4]{\frac{9\tilde{\gamma}^{11}}{K^2} \Big|_{\mathcal{J}^+}} = 2\sqrt{M}. \quad (2.93)$$

Für das Flächenelement dA gilt $dA = \Omega^{-2} d\tilde{A}$. Dementsprechend lässt sich der Flächeninhalt der zweidimensionalen Fläche $\mathcal{A}_{\mathcal{J}^+}$ durch sein bei \mathcal{J}^+ endliches, konformes Pendant $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{J}^+}$ ausdrücken.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{J}^+} = \oint_{\mathcal{J}^+} dA_{\mathcal{J}^+} \quad (2.94)$$

$$= \Omega^{-2}|_{\mathcal{J}^+} \oint_{\mathcal{J}^+} d\tilde{A}_{\mathcal{J}^+} \quad (2.95)$$

$$= \Omega^{-2}|_{\mathcal{J}^+} \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{J}^+} \quad (2.96)$$

Da $\omega|_{\mathcal{J}^+}$ und $\phi|_{\mathcal{J}^+} = \phi_0$ winkelunabhängig sind, und damit auch $\Omega|_{\mathcal{J}^+} = (\omega/\phi^2)|_{\mathcal{J}^+}$, kann der konforme Faktor vor das Integral gezogen werden.

Entsprechend der Diskussion in Abschnitt [1.2](#) ist mit Gleichung [\(1.60\)](#) der Normalenvektor auf \mathcal{J}^+ durch $\tilde{s}^i = -\tilde{\gamma}^{1i}/\sqrt{\tilde{\gamma}^{11}}$ gegeben. In den Expansionen [\(1.57\)](#) steht die mittlere äußere Krümmung von \mathcal{J}^+ , $\tilde{\kappa} = \tilde{\nabla}_i \tilde{s}^i$, der Regularitätsdiskussion in Abschnitt [2.2](#) folgend muss für die hier konstruierten regulären Lösungen $\tilde{\kappa} = 0$ gelten. Mit diesen Betrachtungen ist der Integrand von Gleichung [\(2.91\)](#)

$$\begin{aligned} \Theta_+ \Theta_- \Omega^{-2} &= \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{1}{9} K^2 \phi_0^4 - \tilde{\gamma}^{11} \right) \Big|_{\mathcal{J}^+} + \frac{2}{\sigma} \left(\tilde{\gamma}_{,\sigma}^{11} \right) \Big|_{\mathcal{J}^+} - \left(2\sqrt{\tilde{\gamma}^{11}} \tilde{\kappa}_{,\sigma} - \tilde{\gamma}_{,\sigma\sigma}^{11} \right) \Big|_{\mathcal{J}^+} \\ &\quad \left(-\frac{2}{3\phi_0^2} K \tilde{s}^i \tilde{s}^j \hat{A}_{ij} + \frac{32\tilde{\gamma}^{11}}{\phi_0} \phi_3 - \frac{\tilde{\gamma}_{,\sigma}^{11} \tilde{\kappa}_{,\sigma}}{\sqrt{\tilde{\gamma}^{11}}} - \sqrt{\tilde{\gamma}^{11}} \tilde{\kappa}_{,\sigma\sigma} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{,\sigma\sigma\sigma}^{11} \right) \Big|_{\mathcal{J}^+} \sigma + \mathcal{O}(\sigma^2). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Der Term $\propto \sigma^{-2}$ verschwindet, da der Klammerausdruck durch die Reihenentwicklung der Hamiltonzwangsbedingung [\(2.93\)](#) identisch verschwindet. Der Term $\propto \sigma^{-1}$ verschwindet ebenfalls, da für $\tilde{\gamma}_{,\sigma}^{11}$

$$\tilde{\gamma}_{,\sigma}^{11}|_{\mathcal{J}^+} \propto -8(\mu^2 - 1) A_{,\mu} A_{,\sigma\mu} - 4A_{,\sigma\sigma} + j^2 - 4 \quad (2.98)$$

gilt. Mit der ACMC-Transformationsfunktion $A(\sigma, \mu)$ und den Forderungen an diese aus der Regularitätsbedingung der Hamiltonzwangsbedingung (2.19) und der ACMC-Bedingung (insbesondere (2.23)) folgt

$$\tilde{\gamma}_{,\sigma}^{11}|_{\mathcal{J}^+} = 0. \quad (2.99)$$

Die Bondi-Masse ergibt sich mit den Gleichungen (2.91) und (2.97) zu

$$M_B = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\tilde{A}_{\mathcal{J}^+}}{16\pi}} \frac{\phi_0^2}{\sigma} \left[1 - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(2\sqrt{\tilde{\gamma}^{11}} \tilde{\kappa}_{,\sigma} - \tilde{\gamma}_{,\sigma\sigma}^{11} \right) \Big|_{\mathcal{J}^+} \sqrt{\tilde{q}} d\mu \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(-\frac{2}{3\phi_0^2} K \tilde{s}^i \tilde{s}^j \hat{A}_{ij} + \frac{32\tilde{\gamma}^{11}}{\phi_0} \phi_3 - \sqrt{\tilde{\gamma}^{11}} \tilde{\kappa}_{,\sigma\sigma} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{,\sigma\sigma\sigma}^{11} \right) \Big|_{\mathcal{J}^+} \sigma \sqrt{\tilde{q}} d\mu \right] \quad (2.100)$$

Dabei ist \tilde{q} die Determinante der auf \mathcal{J}^+ eingepprägten zweidimensionalen Metrik. Mit den vorgegebenen freien Daten heben sich die ersten beiden Summanden auf und der Grenzwert führt auf ein endliches Resultat.

$$\frac{M_B}{M} = \sqrt{\frac{\tilde{A}_{\mathcal{J}^+}}{16\pi}} \int_{-1}^1 \left(-\frac{K \tilde{s}^i \tilde{s}^j \hat{A}_{ij}}{6M} + \frac{16\tilde{\gamma}^{11}}{\sqrt{M}} \phi_3 - \sqrt{\tilde{\gamma}^{11}} \tilde{\kappa}_{,\sigma\sigma} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{,\sigma\sigma\sigma}^{11} \right) \Big|_{\mathcal{J}^+} \sqrt{\tilde{q}} d\mu \quad (2.101)$$

In der obigen Gleichung wurde $\phi_0 = 2\sqrt{M}$ (2.93) verwendet.

Abbildung 2.12 zeigt M_B/M über der Störung $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ aufgetragen. Der Parameter M ist der globale Skalierungsparameter der Kerr-Lösung der freien Daten. Der Drehimpulsparameter ist in der folgenden Diskussion $j \in \{0.5, 0.9\}$. Die Farbkodierungen in Abbildung 2.12 (und den folgenden Abbildungen 2.13 - 2.15) spiegeln die Diskussion in Abschnitt 2.6.1 über die marginal gefangenen Flächen wieder. Der schwarze Punkt ist der ungestörte Fall. Kleine positive Störungen $0 < \Delta\sigma_{\mathcal{H}} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ werden durch eine durchgezogene schwarze Linie dargestellt, in diesem Fall ist die vorgeschriebene MOTS \mathcal{H} auch der scheinbare Horizont $\hat{\mathcal{H}}$. Die blaue Strich-Punkt-Linie steht für größere Störungen $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} > \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$, bei denen sich eine neue MOTS \mathcal{S}_+ ausgebildet hat, welche der scheinbare Horizont ist. Für diese Störungen gilt $M_B \leq M$, wobei das Gleichheitszeichen für den ungestörten Fall gilt. Negative Störparameter sind durch eine rote gestrichelte Linie dargestellt, dabei gilt $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}} < 0$. Lösungen mit einer MITS \mathcal{S}_- innerhalb des Gebietes wurden verworfen. Für $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < 0$ gilt $M_B > M$.

Mit dem ersten nichtverschwindenden Drehimpulsmultipolmoment kann der spezifische Drehimpuls des gestörten Schwarzen Loches durch

$$j_B = \frac{J_1}{M_B^2} \quad (2.102)$$

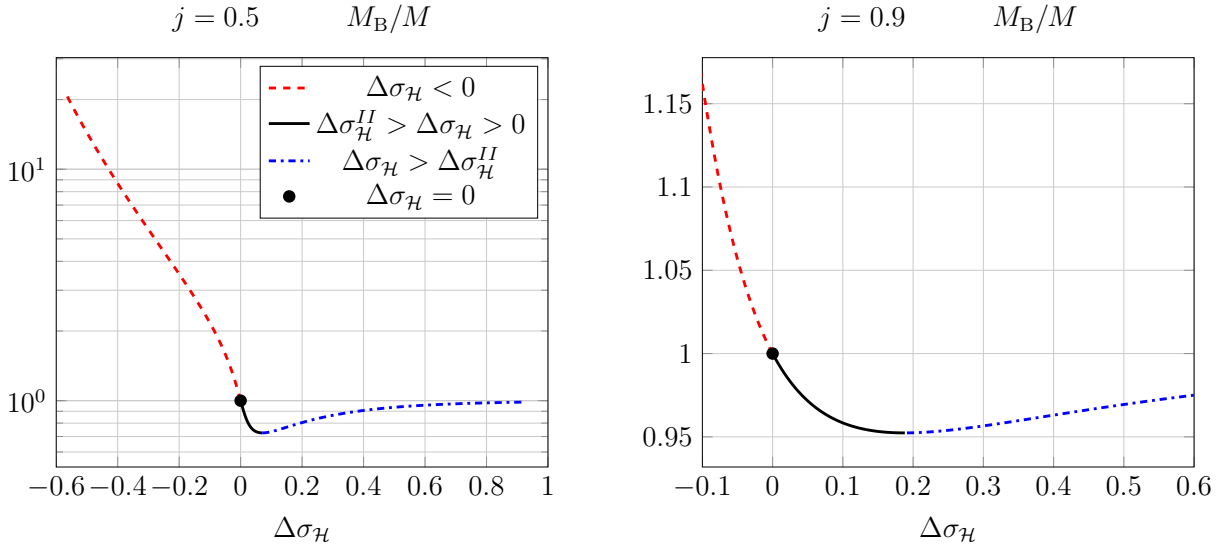


Abbildung 2.12.: Die Bondi-Masse M_B/M in Abhängigkeit des Störungsparameters $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ für freie Daten mit $j \in \{0.5, 0.9\}$. Für die ungestörte Lösung gilt $M_B = M$ (schwarzer Punkt). Die durchgezogene schwarze Linie gilt für positive Störparameter bei denen die vorgeschriebene MOTS \mathcal{H} mit dem scheinbaren Horizont $\hat{\mathcal{H}}$ übereinstimmt. Die blaue Strich-Punkt-Linie gilt für große Störungen bei denen sich eine neue Fläche \mathcal{S}_+ als scheinbarer Horizont $\hat{\mathcal{H}}$ ausgebildet hat. Die rote gestrichelte Linie sind kleine Störungen mit negativem Störparameter.

definiert werden. Abbildung 2.13 zeigt j_B in Abhängigkeit des Störparameters $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$. Im ungestörten Fall gilt $j_B = j$, mit dem Drehimpulsparameter der freien Daten j . Für negative Störungen $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} < 0$ fällt j_B monoton ab. Bei positiven Störungen existiert für $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ ein Maximum, die Lage von $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ und die maximalen j_B sind in Tabelle 2.3 aufgelistet.

j	$\max(j_B)$	$\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$
0.5	0.948956	0.070191
0.9	0.992244	0.188212
0.999	0.999998	0.078139

Tabelle 2.3.: Tabelle der maximalen j_B der Lage der kritischen Störung $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$.

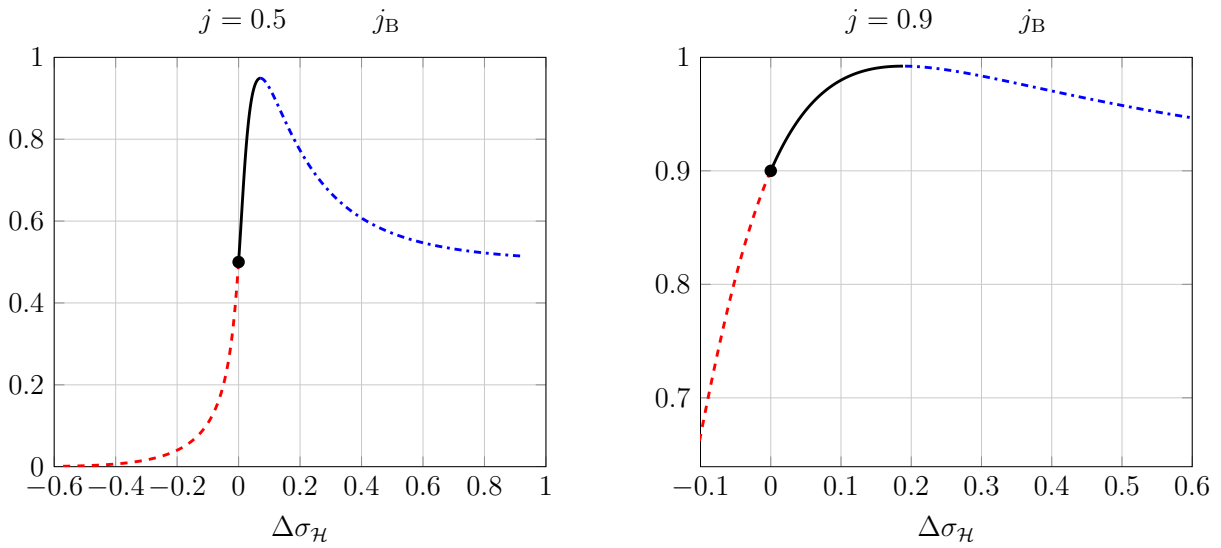
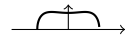


Abbildung 2.13.: Der spezifische Drehimpuls $j_B = J_1/M_B^2$ über dem Störparameter $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ für $j \in \{0.5, 0.9\}$. Die Farbkodierung entspricht der in Abbildung 2.12. Für $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ erreicht j_B ein Maximum. In Tabelle 2.3 sind die $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ sowie die maximalen j_B aufgelistet.

Abbildung 2.14 zeigt dieses Verhalten nochmals anhand dimensionsloser Größen. Die Darstellung von $8\pi J_1/\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{H}}}$ über $\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{H}}}$ vermeidet die koordinatenabhängige Störung $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$. Die für die Abbildungen 2.12 und 2.13 diskutierten Fälle $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{III} < \Delta\sigma_{\mathcal{H}} < 0$, $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = 0$, $0 > \Delta\sigma_{\mathcal{H}} > \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ und $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II} > \Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ sind in Abbildung 2.14 wiederzuerkennen.

Für sehr starke positive Störungen scheinen die physikalischen Größen M_B und j_B wieder zu ihrem ungestörten Wert zu konvergieren (siehe Abbildungen 2.12 und 2.13). In der dimensionslosen Darstellung in Abbildung 2.14 ist ein ähnliches Verhalten zu beobachten. Diese Beobachtung motiviert die Vermutung, dass für sehr starke Störungen die Lösung wieder in den ungestörten Fall übergeht. Ob dies tatsächlich der Fall ist, Bedarf jedoch noch weiterer Untersuchungen. In [89] wurde ein vergleichbarer Effekt gefunden. Stark gestörte Anfangsdaten, welche aus der Kerr-Lösung gewonnen wurden, schienen sich für starke Störungen wieder der ungestörten Lösung anzunähern.

2.6.4. Ungleichungen für gestörte Schwarze Löcher

Im Folgenden sollen Ungleichungen für Schwarze Objekte untersucht werden, diese Untersuchung dient mehreren Zwecken. Zum ersten werden zum Abschnitt 2.6.2 weitere

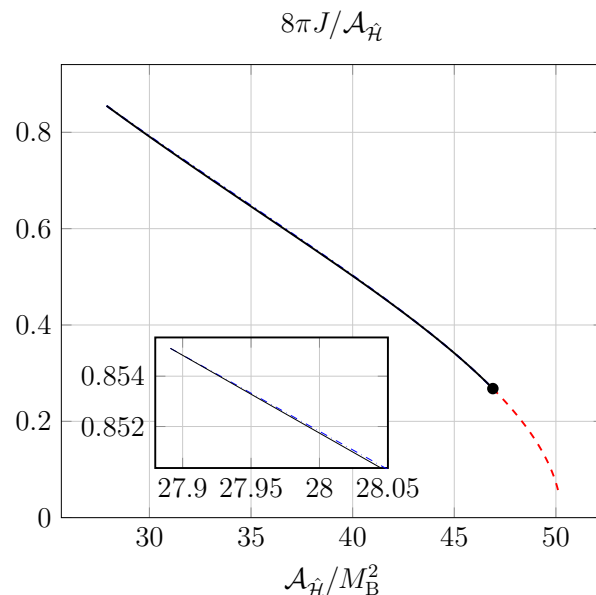


Abbildung 2.14.: Koordinatenunabhängige Darstellung der physikalischen Größen der konstruierten Anfangsdaten. Die Farbkodierung entspricht Abbildung [2.12](#), die beiden Zweige $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} > 0 > \Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II}$ und $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}^{II} > \Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ liegen fast übereinander und sind nochmal ausschnittsweise vergrößert dargestellt.

Argumente vorgebracht, die darlegen, dass es sich bei den konstruierten Anfangsdaten um gestörte Kerrsche Schwarze Löcher handelt. Zweitens wird das gesamte Verfahren auf seine Korrektheit hin überprüft. Kleinste Fehler in der Konstruktion der Anfangsdaten oder in der Berechnung der physikalischen Größen in den Abschnitten [2.6.2](#) und [2.6.3](#) sollten durch eine Ungültigkeit der bekannten Ungleichungen erkennbar sein. Des Weiteren bietet die Untersuchung eine Probe des bekannten Bildes des Gravitationskollapses [\[64\]](#).

Unter der Gültigkeit der schwachen kosmischen Zensur (weak cosmic censorship) schlug PENROSE [\[90\]](#) die Ungleichung

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \leq 16\pi M_{\text{ADM}}^2 \quad (2.103)$$

vor, welche die Fläche eines Schwarzen Loches mit seiner ADM-Masse in Beziehung setzt. Die Argumentation von PENROSE beginnt bei der Ungleichung

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \leq 16\pi M_{\text{B}}^2 \quad (2.104)$$

und verwendet die Tatsache, dass die Bondi-Masse immer kleiner gleich der ADM-Masse ist $M_{\text{B}} \leq M_{\text{ADM}}$. Dies führte zu der bekannteren Ungleichung [\(2.103\)](#).

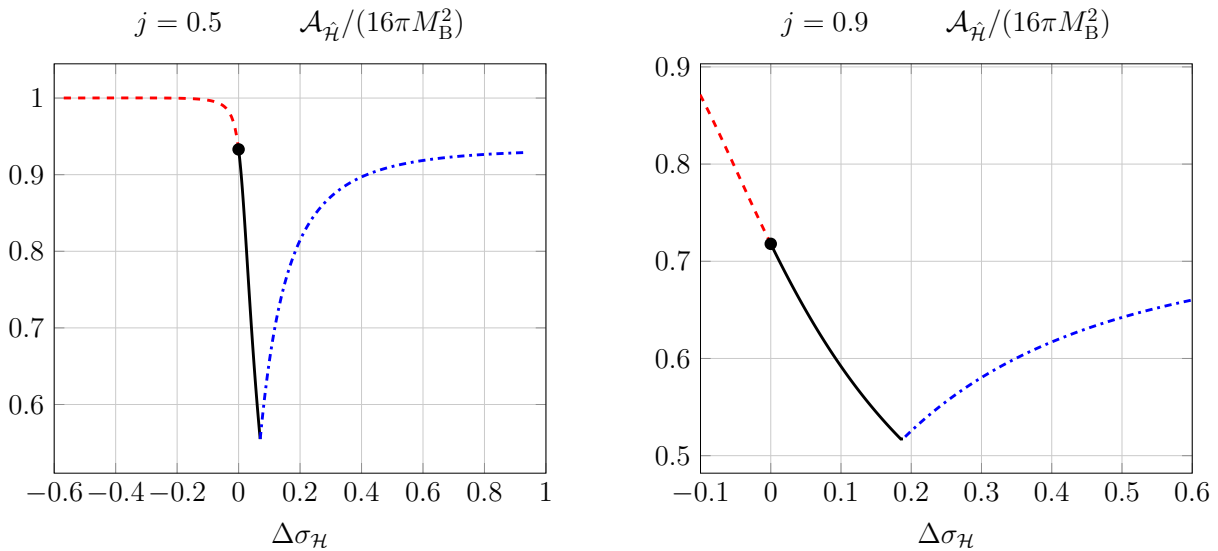


Abbildung 2.15.: Die Penrose-Bondi Ungleichung $\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{H}}}/(16\pi M_{\text{B}}^2) < 1$ (2.104) über dem Störparameter $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ für freie Daten mit $j = 0.5$. Der Farbcode entspricht Abbildung 2.12.

Hyperboloidale Blätter bieten keinen Zugang zur ADM-Masse, die Gültigkeit der stärkeren Aussage bezüglich der Bondi-Masse (2.104) lässt sich hingegen mit den konstruierten Anfangsdaten verifizieren. Abbildung 2.15 zeigt die Gültigkeit der Penrose-Bondi-Ungleichung (2.104) für freie Daten mit $j = 0.5$ und $j = 0.9$.

In der Penrose-Ungleichung (2.103) und der Penrose-Bondi-Ungleichung (2.104) ist das Gleichheitszeichen nur für die Schwarzschildlösung erfüllt. DAIN et. al [91] diskutierten die Penrose-Ungleichung (2.103) für rotierende axialsymmetrische Objekte und führten die Ungleichung

$$\epsilon_{\text{A}} := \frac{\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{H}}}}{8\pi(M_{\text{ADM}}^2 + \sqrt{M_{\text{ADM}}^4 - J^2})} \leq 1 \quad (2.105)$$

ein. In dieser Formulierung gilt das Gleichheitszeichen nur für Lösungen der Kerr-Familie. Die Argumentation, welche von der Ungleichung für die Bondi-Masse (2.104) auf die Ungleichung für die ADM-Masse (2.103) führt, kann für die von DAIN vorgeschlagene Größe ϵ_{A} rückwärts vollzogen werden. Dies motiviert die Dain-Bondi-Zahl ϵ_{AB} [92].

$$\epsilon_{\text{AB}} := \frac{\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{H}}}}{8\pi(M_{\text{B}}^2 + \sqrt{M_{\text{B}}^4 - J^2})} \leq 1 \quad (2.106)$$

Abbildung 2.16 zeigt für die konstruierten Anfangsdaten mit $j = 0.5$ und $j = 0.9$ die Dain-Bondi-Zahl. Die numerischen Ergebnisse unterstützen die Vermutung, dass auf den

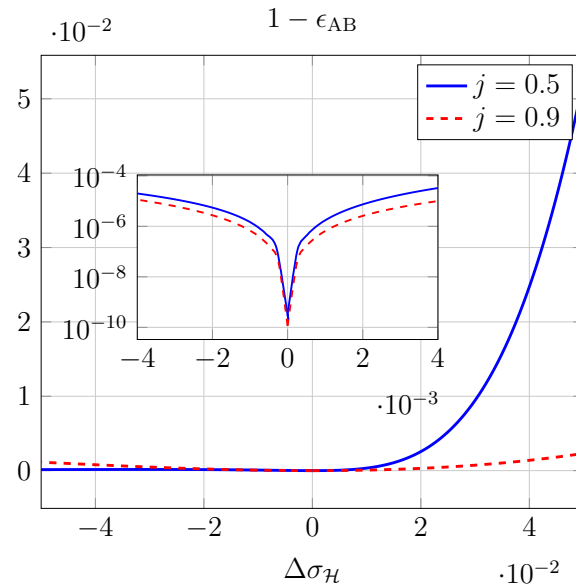


Abbildung 2.16.: Die Dain-Bondi-Zahl (2.106) über dem Störparameter $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ für konstruierte Anfangsdaten mit $j = 0.5$ und $j = 0.9$. Gleichheit wird nur für die ungestörte (stationäre) Lösung erzielt. Die eingebettete Grafik zeigt eine Vergrößerung für kleine Störungen $\Delta\sigma_{\mathcal{H}}$ in logarithmischer Darstellung.

hier verwendeten hyperboloidalen Blättern die Ungleichung $\epsilon_{AB} \leq 1$ gilt. Aufgrund dieser Feststellung wollen wir die Dain-Bondi-Zahl ϵ_{AB} als relevante Größe für die Untersuchung des Gravitationskollapses vorschlagen.

Durch die verwendeten hochpräzisen numerischen Methoden ist es möglich, die Dain-Bondi-Ungleichung bis auf eine relative Genauigkeit von 10^{-10} zu überprüfen. Kleinste Ungenauigkeiten in der Konstruktion der Anfangsdaten oder der Bestimmung der physikalischen Größen würden die Gültigkeit der Penrose-Bondi-Ungleichung und der Dain-Bondi-Ungleichung stören. Unter Annahme der Gültigkeit der Dain-Bondi-Ungleichung ergibt sich ein weiterer Nachweis, dass es sich um gestörte Schwarze Löcher handelt, da die numerische Gleichheit nur für $\Delta\sigma_{\mathcal{H}} = 0$ beobachtet wurde und kleinste Störungen $\epsilon_{AB} < 1$ erzeugen.

3. Die CMC-Blätterung

Auf Blättern mit konstanter mittlerer Krümmung K entkoppeln die konformen Zwangsbedingungen (1.34, 1.42).

$$8\omega^2\tilde{\nabla}^2\phi - 8\omega\tilde{\nabla}_i\omega\tilde{\nabla}^i\phi - (\omega^2\tilde{R} + 4\omega\tilde{\nabla}^2\omega - 6\tilde{\nabla}_i\omega\tilde{\nabla}^i\omega)\phi = \frac{2}{3}K^2\phi^5 - \omega^6\hat{A}_{ij}\hat{A}^{ij}\phi^{-7}$$

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}}V^i = -\tilde{\nabla}_jM^{ij}$$

Die Vektorzwangsbedingung kann in einem ersten Schritt gelöst werden, die daraus gewonnenen V^i werden dann mittels $\hat{A}^{ij} = (\tilde{\mathcal{L}}V)^{ij} + M^{ij}$ (1.39) in die Hamiltonzwangsbedingung eingebunden. Für den Fall konform flacher Daten existiert eine analytische Lösung der Vektorzwangsbedingung, die Bowen-York-Daten [55]. Diese Lösungen wurden in [18] verwendet, um Anfangsdaten für einzelne und mehrere Schwarze Löcher zu erzeugen.

In Abschnitt 3.2 werden diese Daten diskutiert. In der CMC-Blätterung ist die Vektorzwangsbedingung, wie auch in der APMC-Blätterung, regulär. Für die Hamiltonzwangsbedingung gilt die von ANDERSSON, FRIEDRICH und CHRUŚCIEL gefundene Regularitätsbedingung der Scherungsfreiheit von \mathcal{S}^+ (siehe Abschnitt 1.1.5).

Auf CMC-Blättern wurden Daten mit isotroper mittlerer Krümmung bestimmt [17, 93], diese Daten beschreiben jedoch keine Schwarzen Löcher [56]. BUCHMAN et al. [18] konstruierten konform flache Anfangsdaten für einzelne und mehrere Schwarze Löcher, unter der Verwendung von Bowen-York-Daten als Lösung der Vektorzwangsbedingung. Mit den in [18] verwendeten Verfahren lassen sich Daten mit hohem Drehimpuls erzeugen. LOVE-LACE et al. [94] zeigen, dass diese Daten jedoch viel unerwünschte Störstrahlung (junk-radiation) enthalten. Die Ursache dieser unphysikalischen Störstrahlung ist, dass die rotierenden Schwarzen Löcher keine stationären Lösungen beschreiben, sondern Lösungen,

die dynamisch Gravitationswellen abstrahlen. Durch Zeiten vor dem Anfangsdatenblatt existiert bereits eine Gravitationswellenverteilung, diese wird durch die Anfangsdaten jedoch nicht korrekt modelliert. Der Unterschied zwischen der korrekten, d.h. aus einer Entwicklung welche bei $t \rightarrow -\infty$ begann, und der konstruierten Strahlungsverteilung wird als Störstrahlung bezeichnet und ist unphysikalisch.

Im Rahmen der Evolution muss das Auslaufen dieser Strahlung abgewartet werden, bevor eine Analyse der Gravitationswellen stattfinden kann. Durch die Verwendung von Anfangsdaten überlagerter Kerr-Schild-Metriken im Quasi-Gleichgewicht kann die Störstrahlung deutlich reduziert werden [94]. In einer Reihe von Arbeiten zeigen GARAT und PRICE [95] sowie VALIENTE KROON und ANTONIO [96, 97], dass auf Blättern, die nach i^0 gehen (Cauchy-Blättern), die einzigen konform flachen, stationären Lösungen die Minkowski- und Schwarzschildlösung sind. Für hyperboloidale Blätter gibt es keine derartige Aussage. Die Vermutung liegt nahe, dass dies auch für hyperboloidale Blätter gilt [98]. Dies bedeutet, dass für die Untersuchung von Schwarzen Löchern mit hohem Drehimpuls die konforme Flachheit der Anfangsdaten aufgegeben werden sollte. Diese Analyse motiviert die Konstruktion von CMC-Blättern für Kerrsche Schwarze Löcher, um Objekte mit beliebig hohem Drehimpuls betrachten zu können. Die in [78] konstruierte und hier vorgestellte CMC-Blätterung für Kerrsche Schwarze Löcher ist konform nicht flach und ermöglicht Blätter mit extremen Kerrschen Schwarzen Löchern.

3.1. Stationäre Schwarze Löcher auf einer CMC-Blätterung

Im Folgenden Abschnitt werden kompaktifizierte hyperboloidale Blätter mit konstanter mittlerer Krümmung für stationäre Kerr-Newman Schwarze Löcher konstruiert. Die in [78] gefundene CMC-Blätterung für die Kerr-Lösung wird ausführlich diskutiert. Die kürzlich analytisch gefundenen CMC-Blätter für die Reissner-Nordström-Metrik [99] wurden als Grenzfall der hier ebenfalls konstruierten CMC-Blätter für die Kerr-Newman-Familie numerisch erzeugt.

Für die Schwarzschildlösung sind CMC-Blätter seit langem analytisch bekannt [100, 101].



In [102] werden numerische Arbeiten diskutiert. In [103] wurde das Verhalten der Blätter bei \mathcal{J}^+ analysiert und kompaktifizierte hyperboloidale Blätter für die Schwarzschildlösung eingeführt.

Hyperboloidale Blätterungen der Kerr-Lösungen wurden als fixierter Hintergrund für die Untersuchung von gravitativen Störungen [104] und Skalarfeldern [46, 105] verwendet. Die dort verwendeten Koordinaten durchdringen den Horizont stetig. Das Gebiet wurde innerhalb bzw. am Horizont des Schwarzen Loches ausgeschnitten [106, 107] (sowie Referenzen in [24]). Das Ausschneiden der Schwarzen Löcher ist im Rahmen des konformen Konzeptes nicht zwingend notwendig. Für die meisten numerischen Rechnungen ist es jedoch ausreichend, das Äußere des Schwarzen Loches zu betrachten. In dieser Arbeit werden deswegen CMC-Blätter der Kerr-Newman-Familie außerhalb des Horizontes konstruiert.

Dieser Teil der Arbeit ist wie folgt gegliedert, in Abschnitt 3.1.1 wird eine Differentialgleichung aufgestellt, deren Lösung eine Koordinatentransformation konstruiert, die auf hyperboloidale CMC-Blätter für Kerr-Newman Schwarze Löcher führt. In Abschnitt 3.1.2 werden die numerischen Ergebnisse vorgestellt, unter anderem auch nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätter für Schwarzschildsche Schwarze Löcher.

3.1.1. Hyperboloidale CMC-Blätter

Für die Konstruktion kompaktifizierter hyperboloidaler Blätter mit konstanter mittlerer Krümmung gehen wir prinzipiell genauso wie bei der Konstruktion von kompaktifizierten hyperboloidalen APMC-Blättern (siehe Abschnitte 2.1 - 2.3) vor. Die Kerr-Newman-Lösung [30, 31] in Kerr Koordinaten $(V, r, \vartheta, \varphi)$ ist [54]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} \right) dV^2 + 2dVdr - 2 \frac{2Mr a - Q^2}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dV d\varphi + \rho^2 d\vartheta^2 - 2a \sin^2 \vartheta dr d\varphi + \frac{1}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \vartheta \right] \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (3.1)$$

mit

$$\rho = \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad \text{und} \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2. \quad (3.2)$$

Mit der Masse M wird wie in Abschnitt 2.1 der dimensionslose Drehimpuls $j = \frac{a}{M} = \frac{J}{M^2}$ eingeführt und zusätzlich verwenden wir die dimensionslose Ladung $q = \frac{Q}{M}$. Für j und q gilt die Ungleichung

$$j^2 + q^2 \leq 1. \quad (3.3)$$

Paare (j, q) , welche die Gleichheit erfüllen, sind extreme Lösungen. Die Spezialfälle sind die Schwarzschildmetrik [26] mit $(j, q) = (0, 0)$, die Reissner-Nordström-Metrik [27, 28] mit $(j, q) = (0, q)$ und die Kerr-Metrik [29] mit $(j, q) = (j, 0)$.

Als Koordinatentransformation auf allgemeine axialsymmetrische kompaktifizierte hyperboloidale Blätter Σ_τ erhalten wir, wie in Abschnitt 2.1, die Koordinatentransformation (2.7 - 2.9) [45].

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arccos \mu \\ r &= \frac{2M}{\sigma} \\ V &= 4M \left[\tau + \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma} - \log(\sigma) + A(\sigma, \mu) \right)}_h \right] \end{aligned}$$

In den Koordinaten $(\tau, \sigma, \vartheta, \varphi)$ liegt der Ereignishorizont des Schwarzen Loches bei

$$\sigma_{\mathcal{H}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - j^2 - q^2}}. \quad (3.4)$$

Es wird eine Differentialgleichung für die Funktion $A(\sigma, \mu)$ in der Höhenfunktion h gesucht, so dass die Lösung dieser Gleichung eine Blätterung mit konstanter mittlerer Krümmung erzeugt. Im Gegensatz zu Kapitel 2, wo lokale Bedingungen an $A(\sigma, \mu)$ bei \mathcal{I}^+ diskutiert wurden, ist die Forderung CMC eine globale Bedingung an $A(\sigma, \mu)$. Für alle $A(\sigma, \mu)$, die in $(\sigma, \mu) \in [0, \sigma_{\mathcal{H}}] \times [-1, 1]$ analytisch sind, erzeugt die obige Koordinatentransformation hyperboloidale Blätter, die am Ereignishorizont des Schwarzen Loches regulär sind. Die einzige grundsätzliche Bedingung an $A(\sigma, \mu)$ ist, dass die Blätterung überall außerhalb von \mathcal{I}^+ raumartig sein muss.

Die mittlere Krümmung der Blätterung ist (1.4)

$$K = \nabla_\mu n^\mu.$$



Die mittlere Krümmung ist auf dem gesamten Gebiet regulär, die Komponenten der physikalischen Metrik $g_{\mu\nu}$ sind in den Koordinaten $(\tau, \sigma, \mu, \varphi)$ bei \mathcal{J}^+ jedoch divergent. Durch die Verwendung der konformen Größen

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}$$

ist es möglich, die mittlere Krümmung in regulären Ausdrücken zu formulieren. Für den konformen Faktor gilt (siehe Abschnitt 1.1.3) $\Omega_{\mathcal{J}^+} = 0$ und $\Omega_{,\sigma}|_{\mathcal{J}^+} \neq 0$. Wir wählen den konformen Faktor wie in Kapitel 2 als

$$\Omega = \frac{\sigma}{4M}. \quad (3.5)$$

Für den konformen lapse $\tilde{\alpha}$ gilt in den Koordinaten $(\tau, \sigma, \mu, \varphi)$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \Omega\alpha = \left(-\tilde{g}^{00}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4 + j^2\mu^2\sigma^2} \left((1 + \sigma) \left(4 - q^2[1 + \sigma]\right) + \frac{1}{4}j^2 \left(\mu^2 - [1 + 2\sigma]^2\right) \right. \\ &\quad \left. - 4(1 - \mu^2)A_{,\mu}^2 + \left(2\sigma^3[j^2 + q^2] + \sigma^2[j^2 + 2q^2 - 8] + 4\right) A_{,\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \sigma^2 \left(\sigma^2 [j^2 + q^2] - 4\sigma + 4\right) A_{,\sigma}^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die mittlere Krümmung (1.4) schreibt sich in den gewählten Koordinaten und mit dem konformen lapse (3.6) als

$$K = \frac{1}{2M(4 + j^2\mu^2\sigma^2)} \sum_{i=0}^5 p_i \sigma^i \quad (3.7)$$

mit den Koeffizienten p_i

$$p_0 = 12\tilde{\alpha} \quad (3.8)$$

$$p_1 = -4\tilde{\alpha}_{,\sigma} + 8 \left[A_{,\mu} \tilde{\alpha} (1 - \mu^2) \right]_{,\mu} \quad (3.9)$$

$$p_2 = -\tilde{\alpha} (8A_{,\sigma} - j^2 - q^2 + 8) \quad (3.10)$$

$$p_3 = \tilde{\alpha}_{,\sigma} (8A_{,\sigma} - j^2 - q^2 + 8) + 8A_{,\sigma\sigma} \tilde{\alpha} \quad (3.11)$$

$$p_4 = 2\tilde{\alpha} ((j^2 + q^2)A_{,\sigma} - 4A_{,\sigma\sigma}) - 2\tilde{\alpha}_{,\sigma} (4A_{,\sigma} + j^2 + q^2) \quad (3.12)$$

$$p_5 = 2(j^2 + q^2)(A_{,\sigma} \tilde{\alpha}_{,\sigma} + A_{,\sigma\sigma} \tilde{\alpha}). \quad (3.13)$$

Die Differentialgleichung (3.7) ist die gesuchte Differentialgleichung für $A(\sigma, \mu)$. Die Gleichung ist linear in den zweiten Ableitungen, jedoch von keinem bekannten Typ. Die Koeffizienten vor den zweiten Ableitungen enthalten $A(\sigma, \mu)$ sowie erste Ableitungen, so

dass die klassische Typisierung fehlschlägt. Für $q = 0$ stimmen die Terme (3.6) - (3.13) mit den in [78] angegebenen überein.

Mit der Abkürzung

$$A_i(\mu) = \left. \frac{\partial^i A(\sigma, \mu)}{\partial \sigma^i} \right|_{\sigma=0} \quad (3.14)$$

wird Gleichung (3.7) bei \mathcal{J}^+ ($\sigma = 0$) in einer Taylorreihe entwickelt. Anstelle der mittleren Krümmung K führen wir die dimensionslose mittlere Krümmung \bar{K} über

$$\bar{K} = KM \quad (3.15)$$

ein. In nullter Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{K}|_{\mathcal{J}^+} &= \left. \frac{3\tilde{\alpha}}{2} \right|_{\mathcal{J}^+} \\ &= \frac{3}{\sqrt{16(\mu^2 - 1)(A'_0)^2 + 16A_1 + j^2(\mu^2 - 1) - 4(q^2 - 4)}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dies bildet einen Zusammenhang zwischen $A'_0 = dA_0/d\mu$ und A_1 . Damit folgt in erster Ordnung mit

$$\begin{aligned} 0 &= 8\bar{K}^2(1 + A_2) - 2(j^2 + 2q^2)\bar{K}^2 + 2\mu \left[9 - j^2\bar{K}^2(1 - \mu^2) \right] A'_0 \\ &\quad + 32\bar{K}^2(1 - \mu^2)A_0'^3 + (1 - \mu^2) \left[9 + 32A_0'^2\bar{K}^2(1 - \mu^2) \right] A_0'' \end{aligned} \quad (3.17)$$

eine Verknüpfung zwischen A_0 und A_2 . Dieses Verfahren kann auf die zweite Ordnung angewandt werden. Dort folgt nach Elimination von A_1 und A_2 eine Bestimmungsgleichung für A_3 .

$$\begin{aligned} 0 &= 243 + 128\bar{K}^4 \left(A_3 + 2 - j^2 \right) + 54\bar{K}^2 j^2 (1 - \mu^2) + 3\bar{K}^4 j^4 (1 - \mu^2)^2 \\ &\quad + 16\bar{K}^4 q^2 \left(j^2 + q^2 - 12 \right) + 768\bar{K}^4 (1 - \mu^2)(1 - 5\mu^2)A_0'^4 \\ &\quad + 96\bar{K}^2(1 - 3\mu^2) \left[9 + \bar{K}^2 j^2(1 - \mu^2) \right] A_0'^2 \\ &\quad - 48\bar{K}^2(1 - \mu^2)^2 \left[21 + 64\bar{K}^2 A_0'^2(1 - \mu^2) \right] A_0''^2 \\ &\quad + 192\bar{K}^2 A_0' \mu (1 - \mu^2) \left[27 + \bar{K}^2(j^2 + 48A_0'^2)(1 - \mu^2) \right] A_0'' \\ &\quad - 32\bar{K}^2 A_0'(1 - \mu^2)^2 \left[27 + 32\bar{K}^2 A_0'^2(1 - \mu^2) \right] A_0''' \end{aligned} \quad (3.18)$$

In dritter Ordnung bricht dieses Verfahren zusammen, d. h. der Koeffizient vor A_4 verschwindet. Damit ergibt sich keine Bestimmungsgleichung für A_4 sondern eine Differentialgleichung für A_0 bezüglich μ .

$$0 = (1 - \mu^2)^2 A_0'''' - 8\mu(1 - \mu^2)A_0''' - 4(1 - 3\mu^2)A_0'' \quad (3.19)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung ist

$$A_0(\mu) = c_1 + c_2\mu - (c_3 + c_4\mu) \log \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right), \quad (3.20)$$

mit den Integrationskonstanten c_1, \dots, c_4 . Damit $A(\sigma, \mu)$ analytisch ist, muss $c_3 = c_4 = 0$ gesetzt werden. Bei \mathcal{J}^+ reguläre Randbedingungen für $A(\sigma, \mu)$ sind dann durch

$$A_0(\mu) = c_1 + c_2\mu \quad (3.21)$$

gegeben. Mit dieser Randbedingung (3.21) ergeben sich reguläre Lösungen $A(\sigma, \mu)$ der CMC-Differentialgleichung (3.7).

Die Diskussion in Abschnitt 2.2 zeigte, dass die Regularitätsbedingung für die Hamiltonzwangsbedingung Forderungen an die Transformationsfunktion $A(\sigma, \mu)$ bei \mathcal{J}^+ stellt. Die Forderung ist durch Gleichung (2.19) gegeben.

$$A_{,\mu}|_{\mathcal{J}^+} = 0$$

Es soll eine Blätterung konstruiert werden, auf der sichergestellt ist, dass die Lösungen der Zwangsbedingungen regulär sind. Die Kerr-Newman-Lösung selbst ist analytisch bekannt und regulär, es sollen jedoch insbesondere Störungen, wie sie in Kapitel 2 diskutiert wurden, reguläre Lösungen besitzen. Aus diesem Grund ist es notwendig, Blätterungen zu konstruieren, welche die Regularitätsbedingungen erfüllen. Die Vektorzwangsbedingung ist bereits durch die CMC-Blätterung regulär. Um die Regularitätsbedingung der Hamiltonzwangsbedingung zu erfüllen, muss in Gleichung (3.21) die Integrationskonstante $c_2 = 0$ gesetzt werden.

Die verbleibende Integrationskonstante c_1 ist eine Verschiebung der Zeitkoordinate, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu Null gesetzt werden kann. Aus dieser Diskussion folgt als Randbedingung für $A(\sigma, \mu)$ in der Differentialgleichung (3.7) bei \mathcal{J}^+

$$A(0, \mu) = 0. \quad (3.22)$$

Aus den Gleichungen (3.16) - (3.18), (3.22) ergeben sich die Funktionen A_1 , A_2 und A_3 zu

$$A_1(\mu) = -1 + \frac{9}{16\bar{K}^2} + \frac{j^2}{16}(1 - \mu^2) + \frac{1}{4}q^2 \quad (3.23)$$

$$A_2(\mu) = -1 + \frac{j^2}{4} + \frac{1}{2}q^2 \quad (3.24)$$

$$A_3(\mu) = -2 - \frac{243}{128\bar{K}^4} + j^2 \left(1 - \frac{27(1 - \mu^2)}{64\bar{K}^2} \right) - \frac{3j^4}{128}(1 - \mu^2)^2 + \frac{q^2}{8}(12 - j^2 - q^2). \quad (3.25)$$

Mit diesen A_i ist die Reihenentwicklung von (3.7) in dritter Ordnung identisch erfüllt. Für alle höheren Ordnungen ergibt sich ein Zusammenhang zwischen A_4 und A_l mit $l > 4$. Dieses Verfahren bricht nicht zusammen, da der Koeffizient A_{l+1} in l -ter Ordnung für $l > 4$ nie verschwindet. Durch Vorschreiben eines regulären A_4 folgt somit ein bei \mathcal{J}^+ analytisches $A(\sigma, \mu)$. Anstelle von A_4 kann auch eine innere Randbedingung vorgegeben werden. Wir wählen als Koordinatenposition der inneren Randbedingung den Ereignishorizont des Schwarzen Loches $\sigma = \sigma_h$ und fordern die Dirichlet-Bedingung

$$A(\sigma_h, \mu) = A_h(\mu). \quad (3.26)$$

Da die Koordinaten den Horizont durchdringen, sind auch Randbedingungen innerhalb des Horizontes möglich um z.B. Störungen wie in Kapitel 2 zu erzeugen. Die einzige Bedingung an $A_h(\mu)$ ist, dass die Blätterung raumartig bleiben muss. Für $A_h(\mu)$ mit starken Gradienten kann das Argument der Wurzel in (3.6) null bzw. negativ werden, dies entspricht einer licht- bzw. zeitartigen Blätterung.

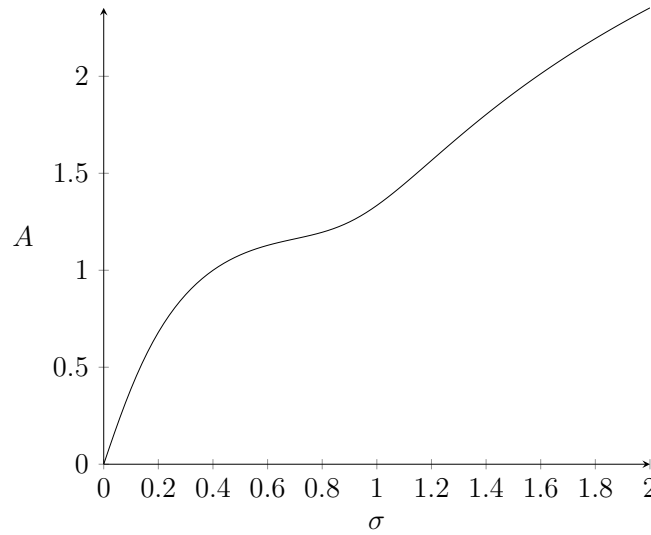
Die innere Randbedingung $A_h(\mu)$ soll von der bekannten Schwarzschildlösung auf sphärisch symmetrischen CMC-Blättern [100], [101], [108] übernommen werden. Die explizite Form von $A(\sigma, \mu) = A_S(\sigma)$ ist

$$A_S(\sigma) = \int_0^\sigma \left[\frac{f(\sigma') + a(\sigma')}{2\sigma'^2(\sigma' - 1)f(\sigma')} + \frac{1}{\sigma'^2} + \frac{1}{\sigma'} \right] d\sigma' \quad (3.27)$$

mit

$$f(\sigma) = \sqrt{1 - \sigma + a^2(\sigma)} \quad \text{und} \quad a(\sigma) = \frac{2\bar{K}}{3\sigma} - \frac{\bar{C}\sigma^2}{4}. \quad (3.28)$$

Hier entspricht $a(\sigma)$ der in der Literatur verwendeten Formulierung und ist nicht mit dem Kerr-Parameter $a = J/M$ zu verwechseln. Ebenfalls wird in der Literatur meist $C = \bar{C}M^2$ anstelle von \bar{C} verwendet. Im Folgenden sollen jedoch die dimensionslosen Größen \bar{K} und \bar{C} genutzt werden.

Abbildung 3.1.: $A_S(\sigma)$ für $\bar{C} = 2.88$ und $\bar{K} = 0.33$.

Für Blätter, welche vom Horizont ($\sigma_h = 1$) nach \mathcal{I}^+ gehen, muss

$$\bar{C} > \frac{8}{3}\bar{K} \quad (3.29)$$

gelten [18] (siehe Abschnitt 3.2.1). Trotz der scheinbar singulären Struktur von (3.27) am Horizont und bei \mathcal{I}^+ ist $A_S(\sigma)$ analytisch für alle $\sigma \in [0, 1]$. In Abbildung 3.1 ist $A_S(\sigma)$ für die Parameter $\bar{K} = 0.33$ und $\bar{C} = 2.88$ skizziert.

Bei \mathcal{I}^+ sind die ersten Terme der Taylorentwicklung $A_S(\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A_i \sigma^i$ durch (3.23) - (3.25) mit $j = 0$ und $q = 0$ gegeben. Der Zusammenhang zwischen \bar{C} und A_4 ist

$$A_4 = \frac{81\bar{C}}{32\bar{K}^3} + \frac{729}{128\bar{K}^4} - 6. \quad (3.30)$$

Der Zusammenhang zwischen $A_h = A_S(\sigma)|_{\sigma=1}$ und den Parametern \bar{K} , \bar{C} kann numerisch gewonnen werden und ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Bisher wurde für die Konstruktion von CMC-Blätterungen für die Schwarzschildlösung sphärische Symmetrie angenommen, d. h. $\partial_\mu \bar{C} = 0$. Diese Bedingung kann fallengelassen werden, und ermöglicht auch für die Schwarzschildlösungen ein μ -abhängiges A_4 , bzw A_h , d. h. eine nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätterung für Schwarzschild. Eine solche Blätterung wird in Abschnitt 3.1.2 vorgestellt.

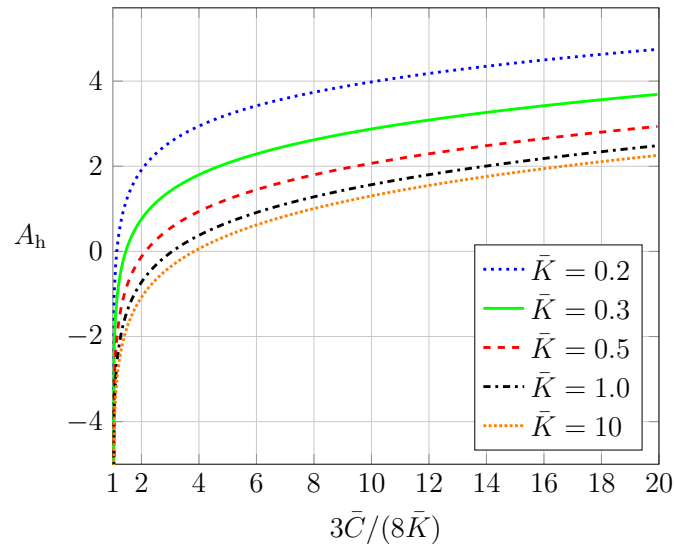


Abbildung 3.2.: Der Zusammenhang zwischen $A_h = A_S(\sigma)|_{\sigma=1}$ der Schwarzschildlösung am Ereignishorizont (dem inneren Rand) und den Parametern \bar{K} , \bar{C} . Für fixiertes \bar{K} ist A_h eine monoton steigende Funktion von \bar{C} .

3.1.2. Numerische Ergebnisse

CMC-Blätter für Kerrsche Schwarze Löcher

Für die Konstruktion von CMC-Blättern der Kerr-Lösung wählen wir als Dirichlet-Randbedingung den Wert von $A_S(\sigma)$ (siehe Abbildung 3.1) am Ereignishorizont des Kerrschen Schwarzen Loches.

$$A_h = A(\sigma_h, \mu) \quad (3.31)$$

Die Parameter \bar{K} und \bar{C} fixieren wir auf

$$\bar{K} = 0.33 \quad \text{und} \quad \bar{C} = 2.88. \quad (3.32)$$

Diese Werte wurden in [92] so gefunden, dass die Chebyshev-Koeffizienten von A_S möglichst steil abfallen. Die Auswahl einer Startlösung mit rasch abfallenden Chebyshev-Koeffizienten liegt darin begründet, dass wir vermuten, dass auch die daraus gewonnenen Lösungen mit $0 < j \leq 1$ ein relativ steiles Abfallverhalten der Chebyshev-Koeffizienten aufweisen. Dies erlaubt die Nutzung größerer Gitter und beschleunigt das numerische Verfahren merklich. Dieses A_S (d. h. $j = 0$) nutzen wir im Folgenden als Startlösung für das Newton-Raphson Verfahren um Lösungen mit $j > 0$ zu erzeugen. Dabei dienen

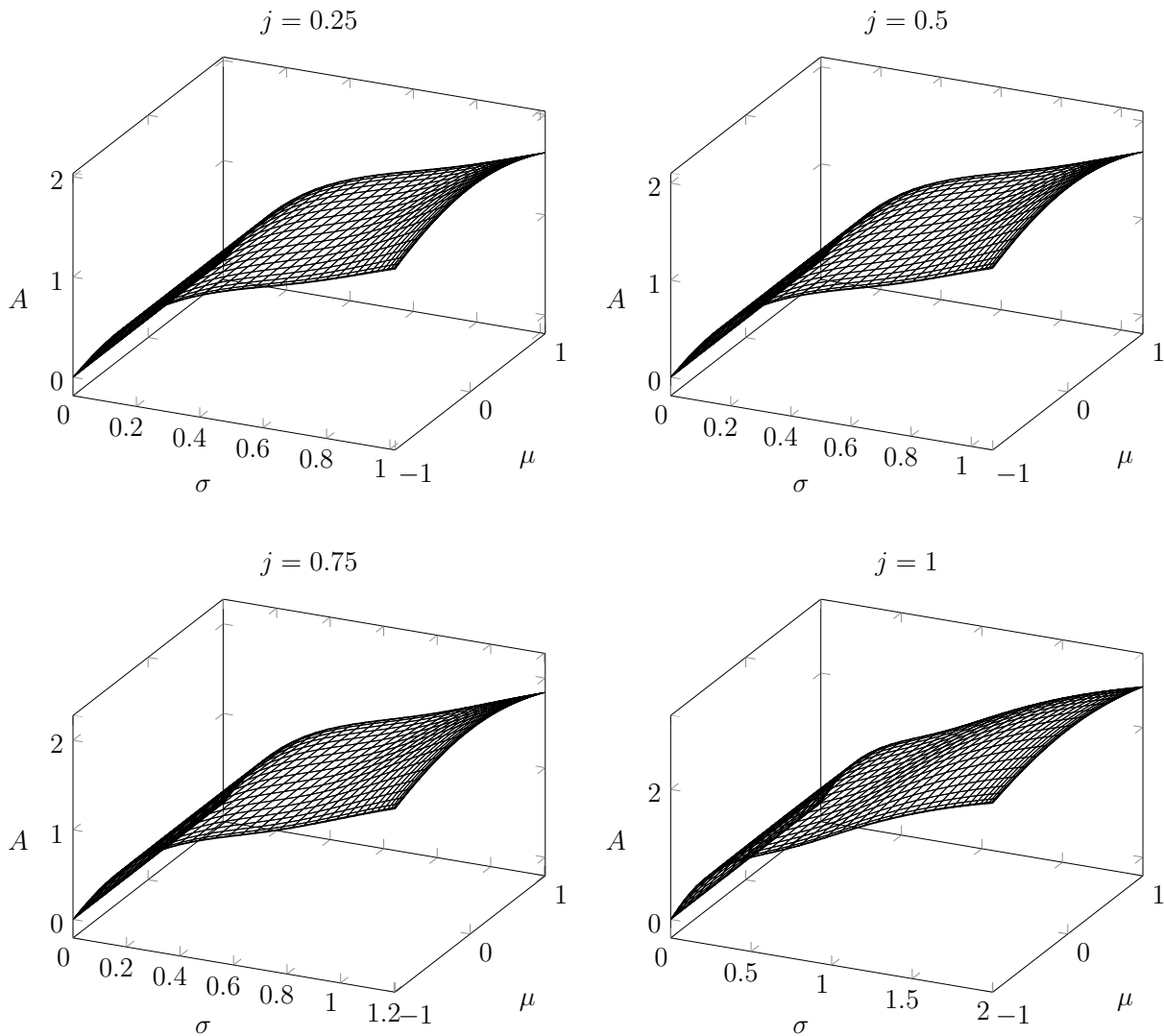


Abbildung 3.3.: Die Transformationsfunktion $A(\sigma, \mu)$ für Kerrsche Schwarze Löcher in $(\sigma, \mu) \in [0, \sigma_h] \times [-1, 1]$ mit $j \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ und den entsprechenden $\sigma_h \in \{1.02, 1.08, 1.20, 1\}$. Der Fall $j = 0$ ist in [Abbildung 3.1](#) dargestellt. Die μ -Abhängigkeit von $A(\sigma, \mu)$ ist selbst für extreme Kerrsche Schwarze Löcher nur sehr schwach.

bereits gefundene Lösungen als neue Startlösung für größere j , bis zu $j = 1$. Die Lösung für das extreme Kerrsche Schwarze Loch kann dabei mit nur drei Zwischenlösungen $j \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ konstruiert werden.

In [Abbildung 3.3](#) ist $A(\sigma, \mu)$ für $j \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ dargestellt, der Fall $j = 0$ wurde bereits in [Abbildung 3.1](#) skizziert.

Um die spektrale Konvergenz der Lösung zu verifizieren untersuchen wir die Größe

$$D_{n_\sigma, n_\mu} = \sup_{\sigma, \mu} |A_{n_\sigma, n_\mu} - A_{200, 50}|, \quad (3.33)$$

welche die maximale Abweichung von $A(\sigma, \mu)$ zu einer hochpräzisen Referenzlösung angibt (siehe Abschnitt 2.5, insbesondere Gleichungen (2.74) und (2.75)). Das Supremum wurde durch die Auswertung an 500×500 äquidistanten Stützstellen angenähert. Die exponentielle Konvergenz der Lösungen in Abbildung 3.4 ist eine starke Indikation für die Regularität der gefundenen $A(\sigma, \mu)$.

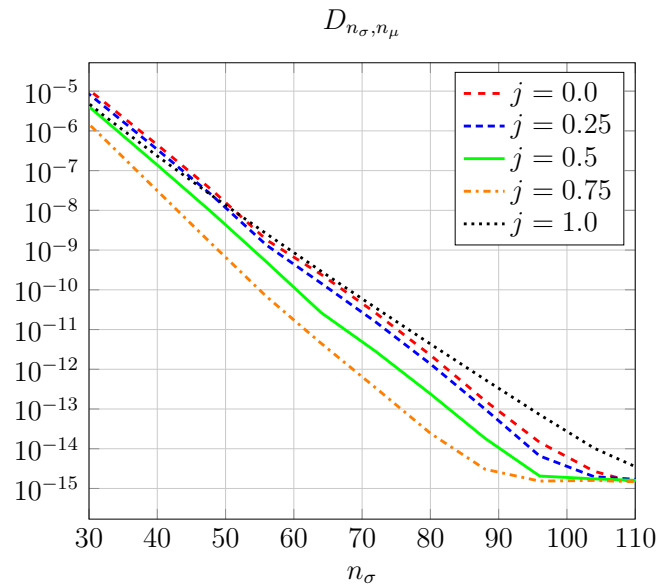


Abbildung 3.4.: Die maximale Abweichung $D_{n_\sigma, n_\mu} = D_{n_\sigma, \frac{1}{4}n_\sigma}$ zu einer hochaufgelösten Referenzlösung (siehe Gleichung (3.33)) für die in den Abbildungen 3.1 und 3.3 dargestellten spezifischen Drehimpulse j . Für einen besseren Vergleich der Konvergenzraten sind alle Lösungen auf dem Gebiet $\sigma \in [0, 2]$ bestimmt worden. Der exponentielle Abfall ist ein starkes Indiz für eine reguläre Lösung.

CMC-Blätter für Schwarzschildsche Schwarze Löcher

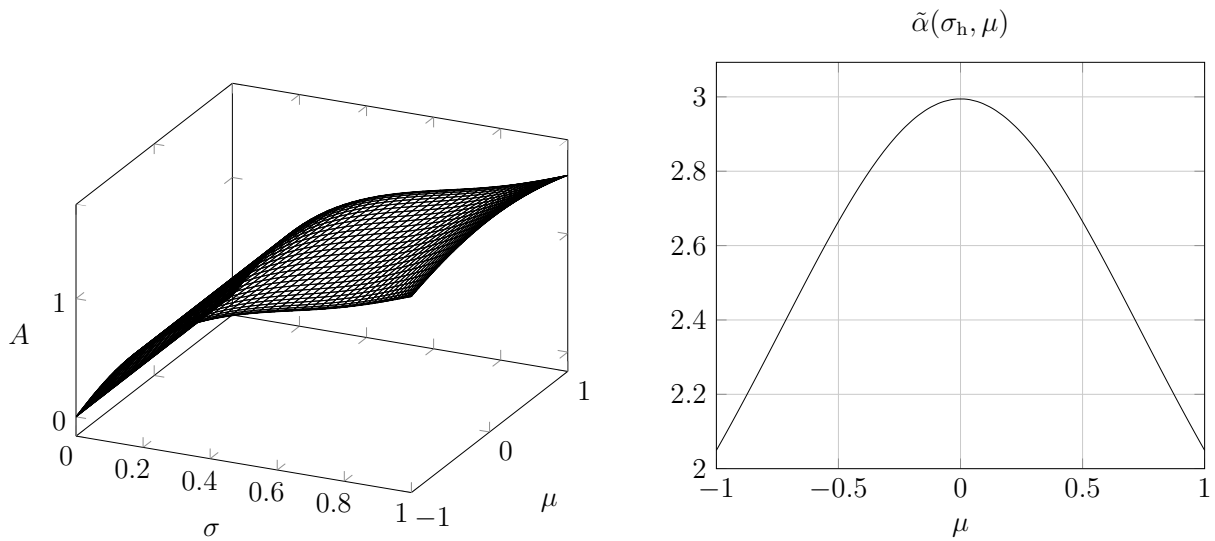


Abbildung 3.5.: $A(\sigma, \mu)$ und der konforme lapse $\tilde{\alpha}$ am Horizont σ_h für eine nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätterung für Schwarzschild mit $\varepsilon = 0.3$ (3.34).

Im Folgenden soll, ausgehend von der bekannten sphärisch symmetrischen CMC-Blätterung für die Schwarzschildlösung, eine nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätterung konstruiert werden. Für die in Abschnitt 3.1.1 diskutierte innere Randbedingung A_h wurde bisher $A_S(\sigma_h)$ gewählt, d. h. der innere Rand enthielt keine μ -Abhängigkeit. Durch das Vorschreiben einer μ -abhängigen inneren Randbedingung sind nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätter für Schwarzschild realisierbar, wir wählen

$$A_h = A_S(1) + \varepsilon \cos(\mu). \quad (3.34)$$

Prinzipiell ist jede Wahl möglich, welche die Raumartigkeit des Blattes erhält (siehe die Diskussion in Abschnitt 3.1.1 bezüglich der inneren Randbedingung (3.26)). Wir merken an, dass auch die Wahl einer μ -abhängigen Bedingung am äußeren Rand \mathcal{I}^+ reguläre nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätter erzeugen würde. Diese Blätter würden jedoch die Regularitätsbedingung für die Hamiltonzwangsbedingung nicht erfüllen, da die Regularitätsbedingung die Forderung $A(\sigma, \mu)_{,\mu}|_{\mathcal{I}^+} = 0$ an $A(\sigma, \mu)$ stellt (siehe Abschnitt 2.2). Da wir Blätterungen konstruieren wollen, welche eine reguläre Lösungen der Zwangsbedingungen erlauben, beschränken wir uns auf die Modifikation der inneren Randbedingung.

Abbildung 3.5 zeigt $A(\sigma, \mu)$ und den konformen lapse $\tilde{\alpha}$ am Horizont für $\varepsilon = 0.3$. Die μ -Abhängigkeit der Blätterung ist an $\tilde{\alpha}$ gut sichtbar.

In Abbildung 3.6 sind die Abweichungen D_{n_σ, n_μ} (3.33) für unterschiedliche ε dargestellt. Die exponentielle Konvergenz ist auch hier ein starkes Indiz für die Regularität der gefundenen Lösungen.

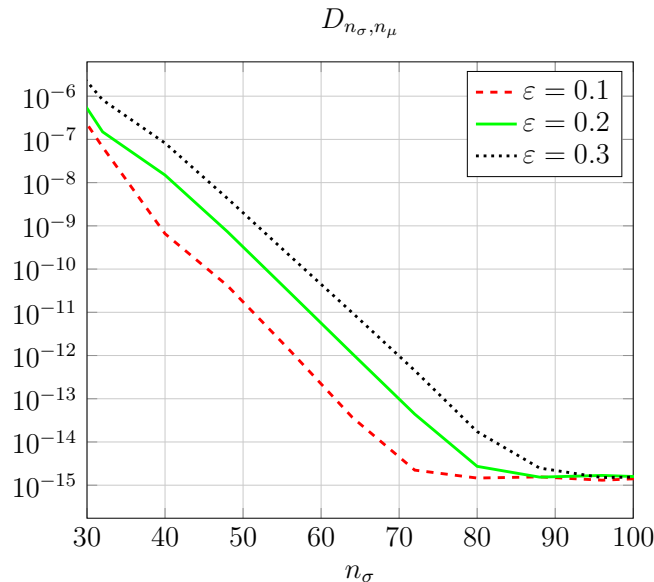


Abbildung 3.6.: Die Abweichungen D_{n_σ, n_μ} (3.33) für die nicht sphärisch symmetrischen CMC-Blätterungen für Schwarzschild. Der innere Randbedingung ist durch Gleichung (3.34) gegeben. Die exponentielle Konvergenz ist ein starkes Indiz für die Regularität der Lösungen.

CMC-Blätter für geladene Schwarze Löcher

Für die Kerr-Newman-Familie wählen wir dieselbe innere Randbedingung wie im Kerrschen Fall

$$A(\sigma_h, \mu) = A_S(\sigma_h). \quad (3.35)$$

Für die in Abbildung 3.7 dargestellte Konvergenz der extremalen Lösungen, d. h.

$j^2 + q^2 = 1$ liegt der Ereignishorizont immer bei $\sigma_h = 2$. Wie auch schon im Kerrschen Fall beobachtet, lässt sich die extreme Parameterkonfiguration mit nur drei Zwischenschritten konstruieren. Die gefundenen Transformationsfunktionen $A(\sigma, \mu)$ entsprechen qualitativ

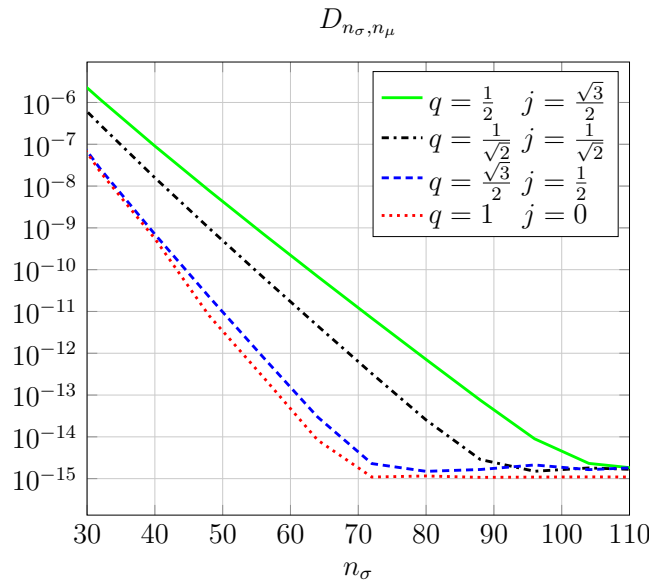


Abbildung 3.7.: Die Abweichungen D_{n_σ, n_μ} (3.33) für extremale Kerr-Newman Schwarze Löcher, d. h. $j^2 + q^2 = 1$. Die exponentielle Konvergenz ist auch hier ein starkes Indiz für die Regularität der Lösungen.

den in Abbildung 3.3 dargestellt. Analog zu den nicht sphärisch symmetrischen Blättern der Schwarzschildlösung ließen sich in diesem Fall nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätter für die Reissner-Nordström-Lösung finden.

3.2. Anfangsdaten für ein binäres System

In Kapitel 2 wurden Anfangsdaten für ein gestörtes Kerrsches Schwarzes Loch konstruiert und die Daten auf ihre physikalischen Eigenschaften untersucht. Für eine zukünftige Evolution der Anfangsdaten sind neben dem einzelnen gestörten Kerrschen Schwarzen Loch insbesondere Daten mit mehreren Schwarzen Löchern von Interesse. Ein erster Schritt zur Evolution von Binärsystemen auf hyperboloidalen Blättern ist ein axialsymmetrisches Binärsystem. In diesem Abschnitt werden Anfangsdaten für ein solches axialsymmetrisches Binärsystem Schwarzer Löcher bestimmt. Diese Daten werden auf CMC-Blättern mit konform flacher Metrik $\tilde{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$ konstruiert. In diesem Fall sind die Bowen-York-Daten [55], welche ursprünglich für asymptotisch flache CMC-Cauchy-Blätter^I ($K = 0$) gefunden wurden, eine Lösung der konformen Vektorzwangsbedingung (1.42) und nur die

^IDiese Art der Blätterung wird oft als „maximal slicing“ bezeichnet.

Hamiltonzwangsbedingung muss noch numerisch gelöst werden.

$$8\omega^2 \tilde{\nabla}^2 \phi - 8\omega \tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \phi - (\omega^2 \tilde{R} + 4\omega \tilde{\nabla}^2 \omega - 6\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega) \phi = \frac{2}{3} K^2 \phi^5 - \omega^6 \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \phi^{-7}$$

Die \hat{A}_{ij} sind durch die Bowen-York-Daten analytisch gegeben, diese Art der Anfangsdaten heißen auch hyperboloidale Bowen-York-Daten [18]. Die hier vorgestellten Daten sind eine axialsymmetrische Rekonstruktion der Arbeit von BUCHMAN et al. [18]. Darauf aufbauend werden die physikalischen Eigenschaften der Daten untersucht und insbesondere marginal gefangene Flächen betrachtet.

3.2.1. Hyperboloidale konform flache CMC-Blätter

Die bekannten sphärisch symmetrischen CMC-Blätter für Schwarzschild [100, 101, 108] sind durch das Linienelement

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + f^{-2} dr^2 - \frac{2a(r)}{f} d\tau dr + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (3.36)$$

mit

$$f(r) = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + a^2(r)} \quad \text{und} \quad a(r) = \frac{Kr}{3} - \frac{C}{r^2} \quad (3.37)$$

gegeben. Die Masse des Schwarzen Loches ist durch M gegeben. Der freie Parameter C wurde bei der Konstruktion der CMC-Blätterung in Abschnitt 3.1.1 für Kerrsche Schwarze Löcher diskutiert. Für die dimensionslosen Größen $\bar{K} = KM$ und $\bar{C} = C/M^2$ muss für Blätter, welche ein Schwarzes Loch beschreiben,

$$\bar{C} > (8/3)\bar{K} \quad (3.38)$$

gelten. Hier ist $a(r)$ die radiale Komponente des Normalenvektors der Blätterung, bei Gültigkeit der Ungleichung ist $a(r < 2M) < 0$, d.h. der Lichtkegel zeigt in Richtung $r = 0$. Wenn die Ungleichung nicht erfüllt ist, würde der Lichtkegel in Richtung $r = \infty$ zeigen, dies entspräche einem Weißen Loch.

Jede sphärisch symmetrische Metrik kann durch eine radiale Koordinatentransformation im räumlichen Anteil konform flach geschrieben werden. In den Koordinaten $(\tau, R, \vartheta, \varphi)$ und mit dem konformen Faktor

$$\Omega = \frac{R(r)}{r} \quad (3.39)$$

wird der räumliche Anteil des Linienelements konform flach. Dabei ist $R(r)$ durch die Differentialgleichung

$$\frac{dR}{dr} = \frac{R}{rf(r)} \quad (3.40)$$

gegeben. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist in Integralform

$$R(r) = R_+ e^{-\int_r^\infty \frac{dr'}{r' f(r')}}. \quad (3.41)$$

Da $R(r = \infty) = R_+$ ist $\Omega|_{\mathcal{I}^+} = 0$ und damit \mathcal{I}^+ eine Koordinatenkugel um den Koordinatenursprung mit dem Radius R_+ . Eine Reskalierung von $R_+ \rightarrow \chi R_+$ mit $\chi \in \mathbb{R}$ skaliert den konformen Faktor $\Omega \rightarrow \chi \Omega$ und den spurfreien Anteil der äußeren Krümmung $\hat{A}_{ij} \rightarrow \chi^{-3} \hat{A}_{ij}$, $\hat{A}^{ij} \rightarrow \chi^3 \hat{A}^{ij}$.

In kartesischen räumlichen Koordinaten ist das gesamte Linienelement (3.36) durch

$$ds^2 = \Omega^{-2} \underbrace{\left(-\tilde{\alpha} d\tau^2 + \delta_{ij} (dx^i + \tilde{\beta}^i dt)(dx^j + \tilde{\beta}^j dt) \right)}_{d\tilde{s}^2} \quad (3.42)$$

gegeben, mit dem konformen lapse $\tilde{\alpha} = \Omega f$ und shift $\tilde{\beta}^i = -\Omega a \frac{x^i}{R}$, welche bei \mathcal{I}^+ regulär sind.

3.2.2. Anfangsdaten für zwei Schwarze Löcher

In den Koordinaten (τ, x, y, z) sind die hyperboloidalen Bowen-York-Daten für ein Schwarzes Loch wie folgt gegeben²

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ij} = & \frac{C}{R^3} \left(3 \frac{x_i x_j}{R^2} - \delta_{ij} \right) \\ & - \frac{3}{R^5} \left(\epsilon_{ikl} S^k x^l x_j + \epsilon_{jkl} S^k x^l x_i \right) \\ & - \frac{3}{R^4} \left(P_i x_j + P_j x_i + P^k x_k \left(\frac{x_i x_j}{R^2} - \delta_{ij} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dabei ist C der bekannte Parameter der CMC-Schwarzschildlösung, S^i der Spin der Objekte und P^i der Boost Vektor.

²In [18] werden noch weitere Terme angegeben, die hier nicht erscheinen, da sie nicht axialsymmetrisch sind.

Die Konstruktion von Anfangsdaten zweier Schwarzer Löcher geschieht durch das Ausschneiden zweier Koordinatenkugeln an den Positionen \vec{r}_B , an deren Rand eine marginal auswärts gefangene Fläche gefordert wird.

Da die Vektorzwangsbedingung in der CMC-Blätterung linear ist, können die Bowen-York-Daten, die Lösung der Vektorzwangsbedingung, superponiert werden. Für jedes Schwarze Loch an der Position \vec{r}_B gibt es ein dazugehöriges ${}^B\hat{A}_{ij}$, ein um \vec{r}_B verschobenes \hat{A}_{ij} für ein Schwarzes Loch, entsprechend Gleichung (3.44). Die \hat{A}_{ij} für beide Schwarze Löcher sind dann durch

$$\hat{A}_{ij} = \sum_{B=1}^2 {}^B\hat{A}_{ij} \quad (3.44)$$

gegeben. Aufgrund der Axialsymmetrie setzen wir ${}^BS^i = S_B\delta_3^i$ und ${}^BP^i = P_B\delta_3^i$, d. h. Spin und Boost zeigen entlang der z-Achse. Die Schwarzen Löcher sind ebenfalls entlang der z-Achse aufgereiht und haben in kartesischen Koordinaten die Positionen $x_B^i = d_B\delta_3^i$. Die freien Daten der Konfiguration bestehen aus der konform flachen Metrik $\tilde{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$, der mittleren Krümmung K , einem globalen R_+ , einem Koordinatenmaß für den Abstand der Schwarzen Löcher a_0 , ihren Radien r_B und \hat{A}_{ij} , in welchem C_B , S_B und P_B kodiert sind.

\mathcal{S}^+ ist durch eine Koordinatenkugel mit dem Radius R_+ gegeben, dies motiviert die Wahl von ω in der Zerlegung des konformen Faktors $\Omega = \omega/\phi^2$ zu

$$\omega = 1 - \left(\frac{R}{R_+} \right)^2, \quad (3.45)$$

dabei ist $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der radiale Koordinatenabstand vom Koordinatenursprung.

Zur numerischen Beschreibung der Objekte führen wir Zylinderkoordinaten (ρ, z, φ) ein. Die Differentialgleichungen werden in den Zylinderkoordinaten formuliert und ausgewertet. Die Zerlegung der Hamiltonzwangsbedingung in Koeffizientenfunktionen entspricht der Zerlegung in Abschnitt 2.4 in den Gleichungen (2.39 - 2.46), die Koeffizientenfunktion H_8 ist hier explizit bekannt. Durch die Verwendung der konform flachen Metrik lassen sich die Koeffizientenfunktionen übersichtlich explizit aufschreiben. Mit der Hamiltonzwangsbedingung

$$H_1\phi_{,11} + H_2\phi_{,22} + H_3\phi_{,12} + H_4\phi_{,1} + H_5\phi_{,2} + H_6\phi + H_7\phi^5 + H_8\phi^{-7} = 0 \quad (3.46)$$

sind die Koeffizientenfunktionen

$$H_1 = H_2 = 8\omega^2 \quad (3.47)$$

$$H_3 = 0 \quad (3.48)$$

$$H_4 = \frac{8\omega}{\rho} (\omega - \rho\omega_{,\rho}) \quad (3.49)$$

$$H_5 = -8\omega\omega_{,z} \quad (3.50)$$

$$H_6 = \frac{1}{\rho} (6\rho\omega_{,z}^2 + 6\rho\omega_{,\rho}^2 - 4\omega (\omega_{,\rho} + \rho\omega_{,\rho\rho} + \rho\omega_{,zz})) \quad (3.51)$$

$$H_7 = -\frac{2}{3}K^2 \quad (3.52)$$

$$H_8 = \omega^6 \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij}. \quad (3.53)$$

Da auf der z -Achse einige Koeffizientenfunktionen singulär sind, verwenden wir die regulären Koeffizientenfunktionen $\hat{H}_i = \rho H_i$. Die spektrale Entwicklung dieser regulären Koeffizientenfunktionen wird in einem angepassten Koordinatensystem durchgeführt. Wir verwenden die von [109, 110] vorgeschlagenen, um \mathcal{I}^+ gefalteten, bisphärischen Koordinaten [111, 112].

Die Koordinatentransformation basiert auf zwei Schritten. Mittels der komplexen Koordinaten

$$c = \rho + \imath z \quad \text{und} \quad \zeta = \eta + \imath \xi \quad (3.54)$$

wird mit der konformen Abbildung

$$c = a_0 \coth \left(\frac{\zeta}{2} \right) \quad (3.55)$$

zwischen den Zylinderkoordinaten (ρ, z, φ) und den bisphärischen Koordinaten (η, ξ, φ) transformiert. Hier ist a_0 ein Maß für den Abstand der gemeinsamen Schwarzen Löcher [109]. Der Abstandsparameter a_0 geht in die Lösung ein, während die Verschiebung der Schwarzen Löcher d_B vom Koordinatenursprung in Abhängigkeit ihrer Größe geschieht. Die Verschiebung ist

$$d_B = \pm \sqrt{a_0^2 + r_B^2}. \quad (3.56)$$

Das positive Vorzeichen gilt für $B = 1$ und das negative für $B = 2$. Mit diesem Verfahren werden die steilen Gradienten um kleine Schwarze Löcher besser aufgelöst, da dort die

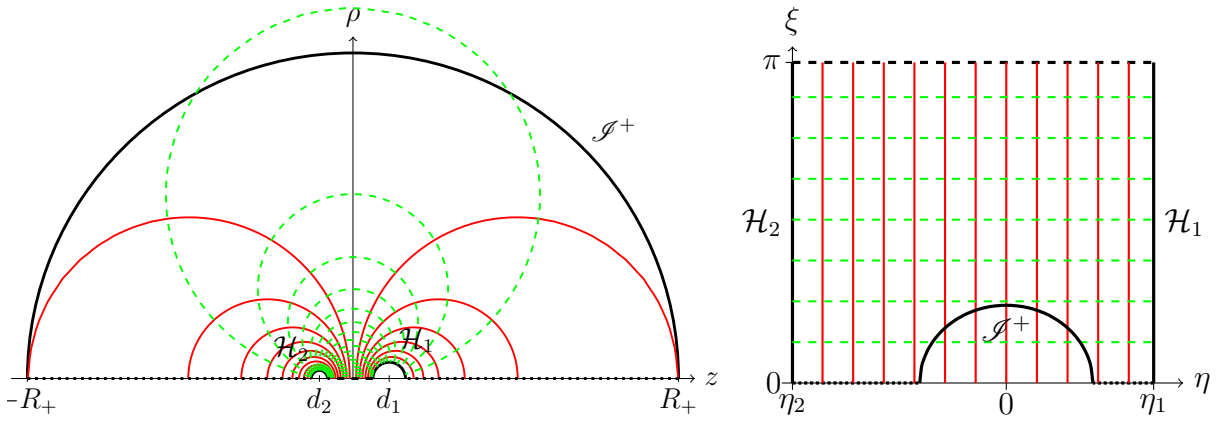


Abbildung 3.8.: Skizze der bisphärischen Koordinatentransformation. Linien mit konstantem ξ sind gestrichelt und Linien mit konstantem η durchgezogen. Die fettgedruckten Linien sind die Gebietsgrenzen, die Linientypen in der linken Grafik entsprechen denen in der rechten Grafik und in den Abbildungen [3.9](#) und [3.10](#).

Gitterpunkte dichter liegen [109](#). In [Abbildung 3.8](#) sind die beiden Koordinatensysteme skizziert.

In diesen Koordinaten sind Linien mit konstantem η bzw. ξ Kreise in den Zylinderkoordinaten. Insbesondere ist der Rand der ausgeschnittenen Koordinatenkugeln mit dem Radius r_B durch

$$\eta_B = \pm \operatorname{asinh} \left(\frac{a_0}{r_B} \right) \quad (3.57)$$

gegeben. Dabei steht, wie in Gleichung [\(3.56\)](#), das positive Vorzeichen für $B = 1$ und das negative für $B = 2$, d. h. $\eta_1 > 0$ und $\eta_2 < 0$. Die Linie $\xi = \pi$ ist die Achse zwischen den Schwarzen Löchern. Die Achse außerhalb der Schwarzen Löcher ist durch $\xi = 0$ gegeben. Diese Koordinaten wurden ursprünglich konstruiert, um $\rho \in (0, \infty)$ und $z \in (-\infty, \infty)$ auf das endliche Rechteck $\xi \in [0, \pi]$ und $\eta \in [\eta_2, \eta_1]$ abzubilden. Dann ist räumlich Unendlich, d. h. $R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty$, durch $\eta = \xi = 0$ gegeben. In den hier verwendeten konform flachen Zylinderkoordinaten gilt jedoch $R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \leq R_+ < \infty$. Dann wird \mathcal{I}^+ mit [\(3.54\)](#) durch die Gleichung

$$\sqrt{-\frac{\cosh(\eta) + \cos(\xi)}{\cos(\xi) - \cosh(\eta)}} = \frac{R_+}{a_0} \quad (3.58)$$

beschrieben. In diesen Koordinaten ist die Lösung der Laplace-Gleichung bei $\eta = \xi = 0$

nur \mathcal{C}^0 [109]. Die Hamiltonzwangsbedingung (1.34) enthält ebenfalls einen Laplace-Term, die problematische Stelle $\eta = \xi = 0$ liegt allerdings außerhalb des Gebietes.

Das sechseckige Gebiet muss für die Numerik in zwei Rechtecke transformiert werden. Diese Aufteilung des Gebietes lässt sich in neuen, um \mathcal{I}^+ gefalteten, Koordinaten (ψ, κ, φ) einfacher realisieren. Die komplexe Koordinate

$$\chi = \psi + i\kappa \quad (3.59)$$

ist durch die konformen Abbildungen

$$\chi = \sqrt{\zeta} \quad \text{und} \quad c = a_0 \coth\left(\frac{\chi^2}{2}\right) \quad (3.60)$$

mit χ und c verknüpft. Das resultierende Gebiet ist in Abbildung 3.9 dargestellt.

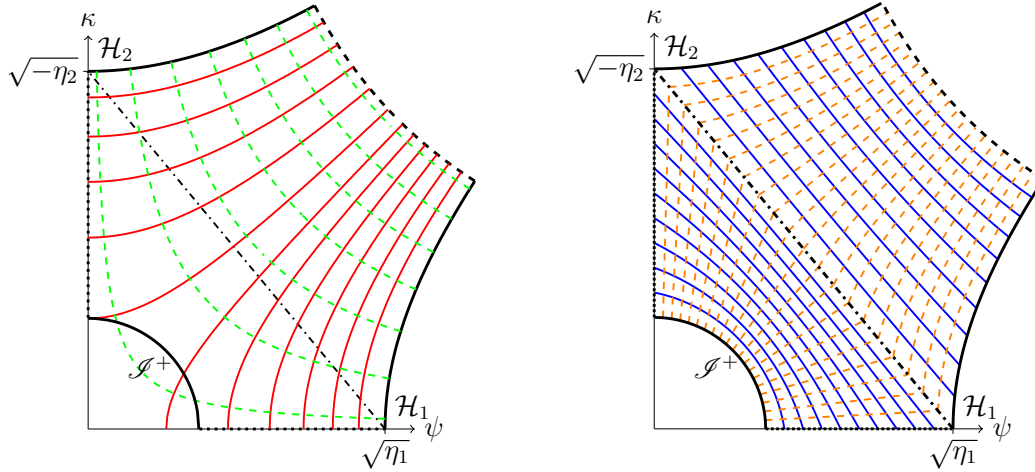


Abbildung 3.9.: Das Gebiet in den Koordinaten (ψ, κ) . Die linke Grafik zeigt wie in Abbildung 3.8 Linien mit konstantem ξ gestrichelt und Linien mit konstantem η durchgezogen. Die rechte Grafik zeigt in den spektralen Koordinaten (A, B) Linien mit konstantem A durchgezogen und Linien mit konstantem B gestrichelt. Die fettgedruckten Linien sind die Gebietsgrenzen und entsprechen den Linientypen in den Abbildungen 3.8 und 3.9. Die Punkt-Strich-Linie kennzeichnet die Grenze zwischen den Gebieten.

Der explizite Zusammenhang zwischen (ρ, z, φ) und (ψ, κ, φ) ist durch

$$\rho = -\frac{a_0 \sin(2\kappa\psi)}{\cos(2\kappa\psi) - \cosh(\kappa^2 - \psi^2)} \quad \text{und} \quad z = \frac{a_0 \sinh(\kappa^2 - \psi^2)}{\cos(2\kappa\psi) - \cosh(\kappa^2 - \psi^2)} \quad (3.61)$$

gegeben. Das durch (ψ, κ) beschriebene sechseckige Gebiet wird auf zwei Rechtecke in den spektralen Koordinaten $A \in [0, 1]$ und $B \in [-1, 1]$ projiziert. Das erste Gebiet wird

durch \mathcal{J}^+ und einen Bogen um die beiden Schwarzen Löcher und die z -Achse außerhalb der Schwarzen Löcher begrenzt. Der Bogen um die beiden Schwarzen Löcher ist in den Koordinaten (ψ, κ) , wie in Abbildung 3.9 dargestellt, eine Gerade. Das zweite Gebiet wird durch den Bogen, die beiden Schwarzen Löcher und die z -Achse zwischen den Schwarzen Löchern eingegrenzt.

Die explizite Transformation in die spektralen Koordinaten ist im Gebiet I

$$\psi_I = (1 - A)\beta(B) \cos\left(\frac{1}{4}\pi(B + 1)\right) + \frac{1}{2}A(1 - B)\sqrt{\eta_1} \quad (3.62)$$

$$\kappa_I = (1 - A)\beta(B) \sin\left(\frac{1}{4}\pi(B + 1)\right) + \frac{1}{2}A(B + 1)\sqrt{-\eta_2}. \quad (3.63)$$

Der äußere Rand des Gebietes, \mathcal{J}^+ , wird durch $A = 0$ beschrieben. Die Funktion $\beta(B)$ ist implizit durch (3.58) gegeben, in den spektralen Koordinaten (A, B) ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\sqrt{\frac{\cos\left(\beta(B)^2 \cos\left(\frac{\pi B}{2}\right)\right) + \cosh\left(\beta(B)^2 \sin\left(\frac{\pi B}{2}\right)\right)}{\cos\left(\beta(B)^2 \cos\left(\frac{\pi B}{2}\right)\right) - \cosh\left(\beta(B)^2 \sin\left(\frac{\pi B}{2}\right)\right)}} = \frac{R_+}{a_0}. \quad (3.64)$$

$\beta(B)$ wird beim Start der numerischen Lösung einmalig mit einem pseudospektralen Newton-Raphson erstellt.

Im Gebiet II werden mit den Hilfsfunktionen

$$\bar{\psi}(\eta, \xi) = \sqrt[4]{\eta^2 + \xi^2} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{\xi}{\eta}\right) \quad (3.65)$$

$$\bar{\kappa}(\eta, \xi) = \sqrt[4]{\eta^2 + \xi^2} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{\xi}{\eta}\right) \quad (3.66)$$

und

$$\begin{aligned} \psi_u(A) &= \bar{\psi}(\eta_2, A\pi) & \kappa_u(A) &= \bar{\kappa}(\eta_2, A\pi) \\ \psi_d(A) &= \bar{\psi}(\eta_1, A\pi) & \kappa_d(A) &= \bar{\kappa}(\eta_1, A\pi) \\ \psi_l(B) &= \frac{1}{2}\sqrt{\eta_1}(1 - B) & \kappa_l(B) &= \frac{1}{2}\sqrt{-\eta_2}(1 + B) \\ \psi_r(B) &= \bar{\psi}\left(\frac{1}{2}((- \eta_1 + \eta_2)B + \eta_1 + \eta_2), \pi\right) \\ \kappa_r(B) &= \bar{\kappa}\left(\frac{1}{2}((- \eta_1 + \eta_2)B + \eta_1 + \eta_2), \pi\right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

die (ψ, κ) wie folgt durch die spektralen Koordinaten (A, B) dargestellt.

$$\begin{aligned} \psi_{II} &= \frac{1}{2}(-AB\psi_d(0) + AB\psi_d(1) - (B - 1)\psi_d(A) - 2(A - 1)\psi_l(B) + 2A\psi_r(B) \\ &+ AB\psi_u(0) - AB\psi_u(1) + B\psi_u(A) + A\psi_d(0) - A\psi_d(1) + A\psi_u(0) - A\psi_u(1) \\ &+ \psi_u(A) + B\psi_d(0) - B\psi_u(0) - \psi_d(0) - \psi_u(0)) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{II} = & \frac{1}{2} (-AB\kappa_d(0) + AB\kappa_d(1) - (B-1)\kappa_d(A) - 2(A-1)\kappa_l(B) + 2A\kappa_r(B) \\
& + AB\kappa_u(0) - AB\kappa_u(1) + B\kappa_u(A) + A\kappa_d(0) - A\kappa_d(1) + A\kappa_u(0) - A\kappa_u(1) \\
& + \kappa_u(A) + B\kappa_d(0) - B\kappa_u(0) - \kappa_d(0) - \kappa_u(0))
\end{aligned} \quad (3.69)$$

Abbildung 3.10 zeigt die Koordinatenlinien mit konstantem A und B in der (ρ, z) -Ebene. In dieser Grafik, sowie den Abbildungen 3.8 und 3.9 wurden die gleichen geometrischen Konfigurationen verwendet.

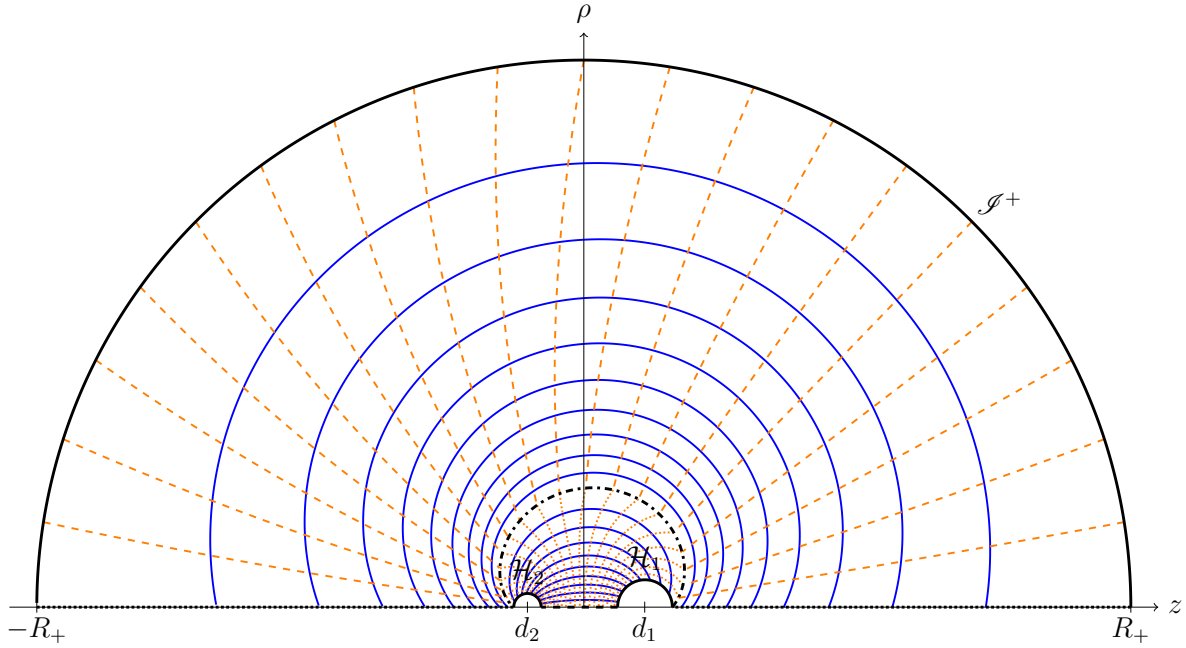


Abbildung 3.10.: Das Gebiet in den Koordinaten (ρ, z) . Wie in der linken Grafik in Abbildung 3.9 sind durchgezogenen Linien Koordinatenlinien mit $A = \text{konst.}$ und gestrichelten Linien Koordinatenlinien mit $B = \text{konst.}$ Die fettgedruckten Linien sind die Gebietsgrenzen und entsprechen den Linientypen in den Abbildungen 3.8 und 3.8. Die Punkt-Strich-Linie kennzeichnet die Grenze zwischen den Gebieten.

3.2.3. Numerische Ergebnisse

Als Startlösung für das Newton-Raphson-Verfahren wird das erste Element der Reihenentwicklung der Hamiltonzwangsbedingung (1.35)

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \sqrt[4]{9 \frac{\tilde{\nabla}_i \omega \tilde{\nabla}^i \omega}{K^2}} \Big|_{\mathcal{I}^+} \\ &= \sqrt{\frac{6}{K R_+}},\end{aligned}\tag{3.70}$$

sowie verschwindende Parameter C_B , S_B und P_B verwendet. Die Parameter a_0 , r_B , K , R_+ sind dabei bereits fixiert. Für diese Konfiguration findet das pseudospektrale Newton-Raphson-Verfahren eine reguläre Lösung der Hamiltonzwangsbedingung. Im Gegensatz zu den in Kapitel 2 konstruierten Daten sind ϕ und Ω hier einheitenlos, da das konforme Linienelement die Einheit der Länge trägt.

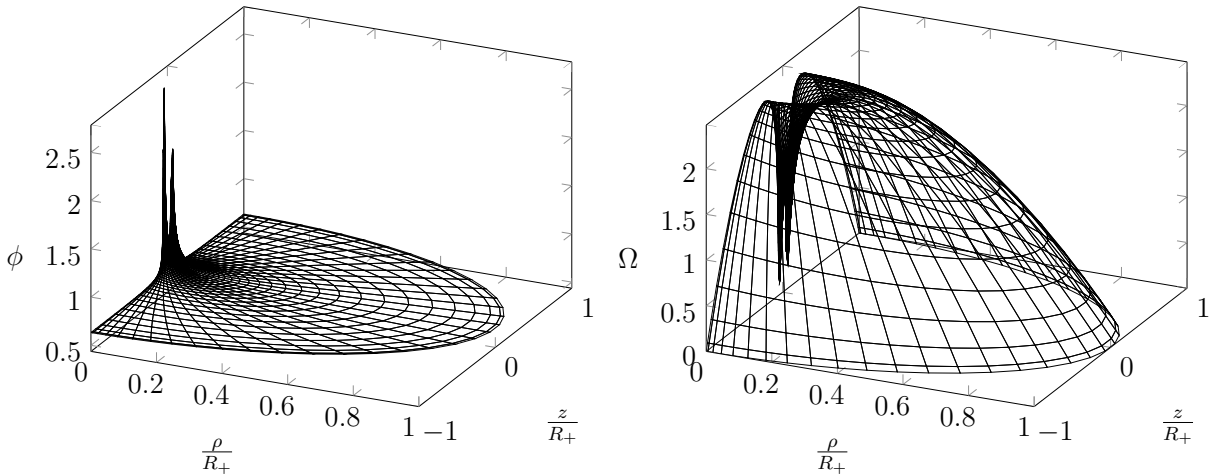


Abbildung 3.11.: Das Potential ϕ und der konforme Faktor $\Omega = \omega/\phi^2$ für die Konfiguration $R_+ = 300$, $K = 0.05$, $a_0 = 14.9629$, $r_1 = 1.3333$, $r_2 = 0.6666$, $C_1 = 0.0613$, $C_2 = 0.0128$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0.5$, $P_1 = P_2 = 0$. Abbildung 3.12 zeigt den Konvergenzplot für diese Lösung.

Für eine ausgewählte Konfiguration ist in Abbildung 3.11 das gelöste ϕ sowie der konforme Faktor Ω dargestellt. An den, auf den ausgeschnittenen Koordinatenkugeln, vorgeschriebenen MOTS nimmt das Potential ϕ relativ große Werte an, d. h. für den konformen Faktor gilt $\Omega \gtrsim 0$. Für alle konstruierten Daten verschwindet Ω nur bei \mathcal{I}^+ und ist ansonsten positiv.

Abbildung 3.12 zeigt die Konvergenz der Lösungen in den beiden Gebieten. Dazu wird die maximale Abweichung

$$D_{n_A, n_B} = \sup_{A, B} |\phi_{n_A, n_B} - \phi_{100, 100}| \quad (3.71)$$

auf einem äquidistanten Gitter mit 500×500 Gitterpunkten angenähert. Die spektrale Konvergenz der Lösungen in Abbildung 3.12 ist ein starkes Indiz für die Regularität der gefundenen Lösung.

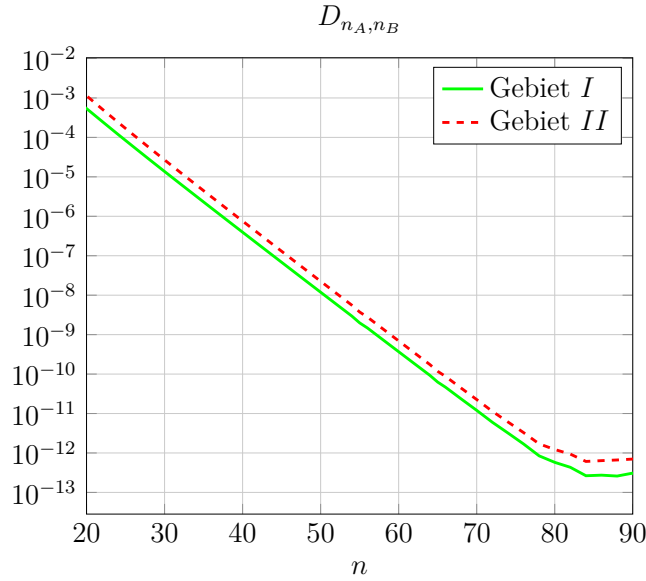


Abbildung 3.12.: Die maximale Abweichung D_{n_A, n_B} über $n = n_A = n_B$. Die Parameter der Konfiguration entsprechen denen in Abbildung 3.11, in welcher das zugehörige ϕ dargestellt ist.

3.2.4. Horizontfinder für Binärsysteme

Der Horizontfinder für das Binärsystem muss sowohl gemeinsame marginal gefangene Flächen als auch einzelne Flächen um die Schwarzen Löcher finden. In den Koordinaten (ρ, z, φ) ist der Strahlkörper $\mathcal{S}(\rho, z)$ an einigen Stellen nicht nach ρ bzw. z differenzierbar. Insbesondere ist, wegen der Axialsymmetrie, auf der z -Achse der Strahlkörper nicht nach z differenzierbar. Dieses Problem wird durch die Einführung von Kugelkoordinaten

(R, μ, φ) umgangen.

$$\rho = R\sqrt{1 - \mu^2} \quad (3.72)$$

$$z = R\mu + d \quad (3.73)$$

Die Winkelkoordinate ϑ ist durch $\mu = \cos(\vartheta)$ ersetzt worden. In diesen Koordinaten sind die gesuchten marginal gefangenen Flächen überall regulär. Hier ist d die Verschiebung des Koordinatensystems bezüglich des Koordinatenursprungs entlang der z -Achse. Das Suchverfahren unterteilt sich in zwei Schritte:

1. Die Suche nach gemeinsamen marginal gefangenen Flächen, d. h. $d=0$. Die Startlösung für MOTS ist \mathcal{S}^+ und für MITS die kleinste beide Schwarzen Löcher umschließende Koordinatenkugel.
2. Die Suche nach getrennten marginal gefangenen Flächen. Sowohl für das obere Schwarze Loch $d = d_1$ und das untere Schwarze Loch $d = d_2$ wird der Horizontfinder gestartet. Für die Suche nach MOTS ist die Startlösung die größte Koordinatenkugel welche das andere Schwarze Loch nicht berührt und für MITS wird der Rand des jeweiligen Schwarzen Loches als Startlösung verwendet.

Wenn im Verlaufe des ersten Schrittes ein scheinbarer Horizont gefunden wird, wird die Suche beendet, gelingt dies nicht, beginnt mit Schritt 2 die Suche nach getrennten marginal gefangenen Flächen. Beim Horizontfinder für den gemeinsamen Horizont ($d = 0$) liegt die Koordinatensingularität $R = 0$ im Gebiet. Eine mögliche Einschnürung des gemeinsamen Horizontes auf den Punkt $R = 0$ findet nicht statt, da sich die marginal gefangene Fläche dort schneiden würde, dies jedoch nicht geschieht, da der Horizont davor in zwei Horizonte zerfällt. Abbildung [3.14](#) zeigt dieses Verhalten in einer Sequenz.

3.2.5. Physikalische Eigenschaften der Anfangsdaten

Wie in Abschnitt 2.6.3 (siehe Gleichungen (2.90) und (2.91)) bestimmen wir die Bondi-Masse als Grenzwert der Hawking-Masse bei \mathcal{I}^+ .

$$M_B = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_S}{16\pi}} \left[1 + \frac{1}{8\pi} \oint_S \Theta_+ \Theta_- dA \right] \Big|_{\mathcal{I}^+} \quad (3.74)$$

Da \mathcal{I}^+ eine Koordinatenkugel um den Koordinatenursprung ist, bestimmen wir die Bondi-Masse in den Kugelkoordinaten (3.72, 3.73) mit $d = 0$. Die Auswertung des Grenzwertes ergibt

$$M_B = \frac{1}{6} R_+^3 \left(K^2 \bar{A} - 2 \sqrt{\frac{6R_+}{K}} \int_{-1}^1 \phi_3|_{\mathcal{I}^+} d\mu \right). \quad (3.75)$$

Dabei ist \bar{A} durch das Integral

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\hat{A}_{ij} \tilde{q}^{ij} \right)_{\mathcal{I}^+} d\mu \quad (3.76)$$

definiert. Die Größe \tilde{q}^{ij} ist die konforme, auf \mathcal{I}^+ eingetragene Metrik. Die analytische Lösung des Integrals ist durch

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \frac{1}{R_+} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{4C_i}{d_i^2 - R_+^2} + \frac{3P_i}{d_i^2} \left(\frac{d_i R_+ (d_i^2 + R_+^2)}{(d_i^2 - R_+^2)^2} - \operatorname{artanh} \left(\frac{d_i}{R_+} \right) \right) \right) \quad (3.77)$$

gegeben.

Mit den Ergebnissen des Horizontfinders wird der Drehimpuls der Schwarzen Löcher als J_1 -Komponente der Multipolzerlegung des Horizontes bestimmt. Dafür werden die Gleichungen (2.83) und (2.87) für den ACMC-Fall aus Abschnitt 2.6.2 auf analoge Weise ausgewertet.

Des Weiteren kann der physikalische Abstand \hat{a} der Schwarzen Löcher über

$$\hat{a} = \int_{-(|d_2|-r_2)}^{(d_1-r_1)} \frac{\phi^2}{\omega} dz \quad (3.78)$$

bestimmt werden.

Mit der Fläche des Horizontes

$$\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{H}}} = \oint_{\hat{\mathcal{H}}} \Omega^{-2} d\tilde{S} \quad (3.79)$$

ermitteln wir als lokale Masse des Schwarzen Loches die Christodoulou-Masse mittels der Horizontrelation für Kerrsche Schwarze Löcher [\[113\]](#).

$$M_C = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_{\hat{H}}}{16\pi} + 4\pi \frac{J_1^2}{\mathcal{A}_{\hat{H}}}} \quad (3.80)$$

Außerdem bestimmen wir die irreduzible Masse mittels der Relation

$$M_{\text{irr}} = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_{\hat{H}}}{16\pi}}. \quad (3.81)$$

Des Weiteren definieren wir

$$\mathfrak{M}_{BC} = \frac{M_B}{M_{C1} + M_{C2}} - 1 \quad (3.82)$$

als eine Möglichkeit um die im System enthaltene Störstrahlung bewerten zu können. Aufgrund der gravitativen Bindungsenergie und der fehlenden Eindeutigkeit der lokalen Massendefinition erwarten wir $\mathfrak{M}_{BC} \gtrsim 0$. Liegt \mathfrak{M}_{BC} deutlich im Prozentbereich, sehen wir, ausgehend von Erfahrungen mit Daten auf Cauchy-Blättern und der ADM-Masse, dies als klares Indiz, dass die im System enthaltene Störstrahlung relativ zu den Massen der Schwarzen Löcher groß ist. Dies muss bei einer Entwicklung der Anfangsdaten beachtet werden. Für den hier betrachteten Fall axialsymmetrischer Anfangsdaten heißt dies, dass die Objekte hinreichend weit voneinander entfernt sein müssen, sodass die Störstrahlung aus dem Gebiet laufen kann.

Für die in [Abbildung 3.11](#) dargestellten Anfangsdaten sind in [Tabelle 3.1](#) die bestimmten physikalischen Parameter aufgelistet.

3.2.6. Diskussion der Anfangsdaten

Für die als Startlösung genutzte Konfiguration ist die Bedingung an das Verhältnis von \bar{C} und \bar{K} [\(3.38\)](#) verletzt. Die konstruierten Daten weisen innerhalb des Gebietes MITS auf und beschreiben damit Weiße Löcher. Im Folgenden werden die Parameter C_B , S_B und P_B schrittweise auf ihre Zielgröße erhöht, wobei die in jedem Schritt gewonnene Lösung als neue Startlösung für das Newton-Raphson-Verfahren dient. Im Laufe dieses Verfahrens wandern die MITS hinter den scheinbaren Horizont und die Daten beschreiben zwei separierte gestörte Schwarze Löcher. [Abbildung 3.13](#) zeigt eine solche Sequenz an

	Abb. 3.11	Abb. 3.13		Abb. 3.14		3.15	
		rechts	links*	mitte*	rechts	links	rechts
$M_B/R_+ \cdot 10^2$	1.32	0.55	0.67	0.63	0.63	1.82	1.81
$A_1/R_+^2 \cdot 10^4$	4.24	1.25	2.91	2.00	2.16	15.39	15.00
$A_2/R_+^2 \cdot 10^4$	3.49	0.33			0.72	6.36	6.23
$M_{C1}/R_+ \cdot 10^2$	0.33	0.16	0.25	0.21	0.21	1.01	1.00
$M_{C2}/R_+ \cdot 10^2$	0.28	0.08			0.12	0.46	0.45
$M_{irr1}/R_+ \cdot 10^2$	0.29	0.16	0.24	0.20	0.21	0.55	0.55
$M_{irr2}/R_+ \cdot 10^2$	0.26	0.08			0.12	0.36	0.35
\mathfrak{M}_{BC}	1.24	1.29	1.68	2.00	0.87	0.23	0.24
j_1	0.84	0	0.47	0.54	0.48	0.92	0.92
j_2	0.67	0			0.38	0.98	0.98
ε_{AB}	0.08	0.10	0.13	0.10	0.15	0.13	0.13
\hat{a}/R_+	0.15	0.04			0.05	0.13	0.13

Tabelle 3.1.: Die aus den Anfangsdaten gewonnenen physikalischen Größen für die in den Abbildungen 3.11, 3.13, 3.14 und 3.15 vorgestellten Daten. Anfangsdaten mit MITS im Gebiet wurden verworfen. M_B ist die Bondi-Masse des Blattes, A_i die Oberflächeninhalte der scheinbaren Horizonte, M_C sind die Christodoulou-Massen und die M_{irr} die irreduziblen Massen der jeweiligen Objekte. Die j_i sind die mit der jeweiligen Christodoulou-Masse gewonnenen spezifischen Drehimpulse. Bei den mit einem Stern gekennzeichneten Daten handelt es sich um Lösungen mit einem gemeinsamen scheinbaren Horizont, d. h. einem gestörten Schwarzen Loch.

Lösungen, die grüne Linie ist der mit dem Horizontfinder ermittelte scheinbare Horizont und die rote Linie die innerste MITS. Mit von links nach rechts steigendem C_1 und C_2 wandern die MITS zum scheinbaren Horizont bis sie dahinter verschwinden.

Bei der Analyse der marginal gefangenen Flächen in den konstruierten Anfangsdaten konnte nachgewiesen werden, dass zwei getrennte Schwarze Löcher konstruiert wurden. Viele der konstruierten Anfangsdaten enthalten MITS zwischen dem scheinbarem Hori-

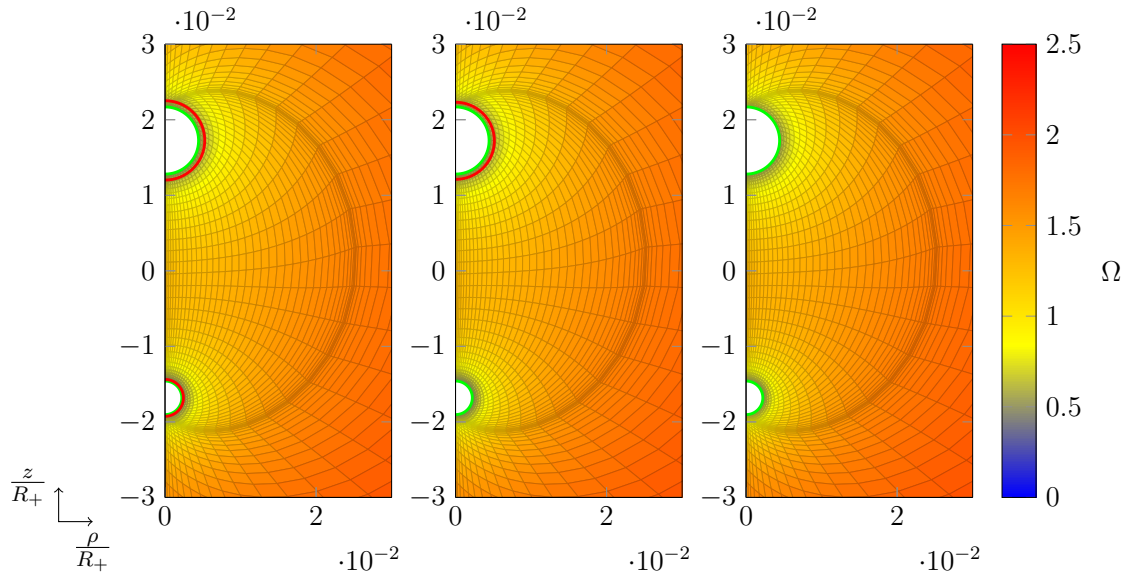


Abbildung 3.13.: Eine Sequenz von Lösungen, die das Verschwinden der MITS in den Schwarzen Löchern bei Steigerung der C_B zeigt. Der konforme Faktor Ω ist durch den Farbverlauf dargestellt. Die linke Grafik zeigt die Lösung mit $C_1 = C_2 = 0$, um beide Schwarze Löcher sind neben den scheinbaren Horizonten (grün) MITS (rot) erkennbar. In der mittleren Grafik ist bei $C_1 = 0.004291$ und $C_2 = 0.000896$ die MITS um das kleinere Objekt im scheinbaren Horizont verschwunden. Die rechte Grafik zeigt $C_1 = 0.014712$, dort ist auch die MITS um das größere Objekt hinter dem scheinbaren Horizont verschwunden. Die übrigen Parameter dieser Lösungen sind $R_+ = 300$, $a_0 = 5$, $K = 0.05$, $r_1 = 1.333$, $r_2 = 0.666$, $S_1 = S_2 = P_1 = P_2 = 0$.

zont und \mathcal{J}^+ . Diese Anfangsdaten und müssen aussortiert werden, da sie Weiße Löcher beschreiben. Für viele der untersuchten Parameterkonfigurationen wurden MITS gefunden, und diese Anfangsdaten verworfen. Auch hier ist es von Interesse Anfangsdaten zu konstruieren die in einen möglichst großen Parameterraum keine Weißen Löcher enthalten. Die Untersuchung der Fragestellung wie die MITS zwischen dem scheinbaren Horizont und \mathcal{J}^+ vermieden werden kann erfordert weitere Forschung.

Die in Abbildung 3.13 und den folgenden Abbildungen 3.14 und 3.15 eingezeichneten Koordinatenlinien sind in ρ -Richtung Linien mit konstanten B und orthogonal dazu Linien mit konstanten A . Die in etwa halbkreisförmige Verdichtung der Koordinatenlinien ist

die Grenze zwischen den beiden Gebieten.

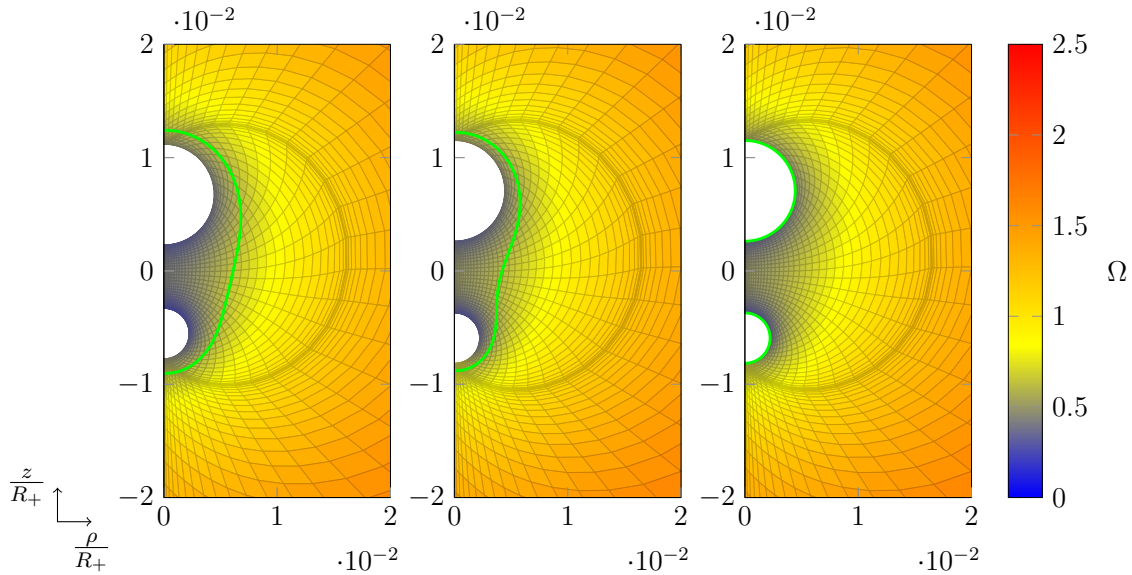


Abbildung 3.14.: Sequenz von Lösungen mit steigendem Abstand a_0 , die den Sprung des scheinbaren Horizontes verdeutlicht. Die linke Grafik zeigt die Lösung für $a_0 = 1.518$. In der mittleren Grafik bei $a_0 = 1.64847$, kurz vor dem Sprung ist der scheinbare Horizont bereits eingeschnürt. Die rechte Grafik bei $a_0 = 1.64848$, direkt nach dem Sprung, zeigt die getrennten scheinbaren Horizonte. Die übrigen Parameter sind $R_+ = 300$, $K = 0.05$, $r_1 = 1.3333$, $C_1 = 0.1$, $S_1 = 0.2$, $r_2 = 0.6666$, $C_2 = 0.075$, $S_2 = 0.05$, $P_1 = P_2 = 0$.

Marginal gefangene Flächen, welche beide Objekte umschließen, wandeln sich bei stetiger Erhöhung des Abstandes a_0 unstetig in zwei getrennte marginal gefangene Flächen, d. h. die Flächen springen. Abbildung [3.14](#) zeigt eine Sequenz mit springendem scheinbaren Horizont.

Bei Anfangsdaten mit höherem Spinparameter S_B kommt es zu einem Ablösen des scheinbaren Horizontes, d. h. die vorgeschriebene MOTS ist nicht mehr die äußerste MOTS. Abbildung [3.15](#) zeigt solche Daten. Die rechte Grafik zeigt Daten mit MITS, welche nicht vollständig zwischen dem scheinbaren Horizont und \mathcal{S}^+ liegt sondern diesen schneidet. Dies ist eine Konfiguration bei einem parametrischen (nichtdynamischen) Übergang zwischen Schwarzem und Weißem Loch. Wenn die MITS vollständig zwischen dem scheinbaren Horizont und \mathcal{S}^+ liegt, handelt es sich um ein Weißes Loch. Der gleiche Effekt der

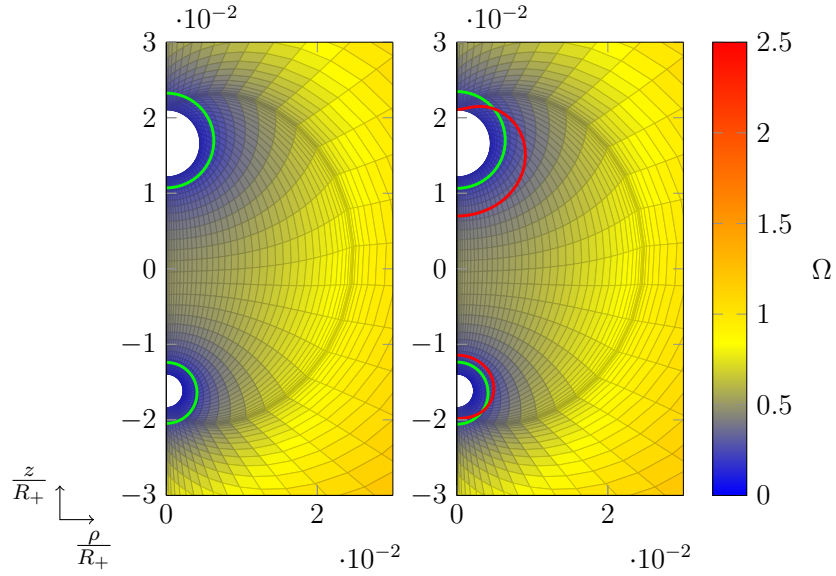


Abbildung 3.15.: Lösungen mit hohem Spinparameter. Die rechte Grafik zeigt eine nicht vollständig zwischen scheinbarem Horizont und \mathcal{I}^+ liegende MITS. Der Unterschied zwischen den beiden Grafiken sind die C_B , für die linke Grafik wurde $C_1 = 0.9952$ und $C_2 = 0.16928$ und für die rechte $C_1 = 1.244$ und $C_2 = 0.2116$ gewählt. An den vorgeschriebenen MOTS ist $\Omega > 0$. Die übrigen Parameter sind $R_+ = 300$, $K = 0.05$, $r_1 = 1.3333$, $S_1 = 10$, $r_2 = 0.6666$, $S_2 = 2.5$, $P_1 = P_2 = 0$.

sich langsam in das Gebiet schiebenden MITS wurde in der Analyse der Anfangsdaten für Kerrsche Schwarze Löcher auf APMC-Blättern gefunden (siehe Abschnitt 2.6). Für Daten mit steigendem Spinparameter steigt auch der Wert von ϕ an der vorgeschriebenen MOTS und der Wert von Ω sinkt, bleibt jedoch stets größer als Null. Für die Daten in den Abbildungen 3.11, 3.13 und 3.14 ist Ω an den vorgeschriebenen MOTS $\Omega|_{\text{MOTS}} \approx 0.4$. Für die Daten mit hohem Spinparameter in Abbildung 3.15 gilt an den vorgeschriebenen MOTS $\Omega|_{\text{MOTS}} \approx 0.2$.

Abbildung 3.16 zeigt eine Übersicht des konformen Faktors aus der linken Grafik in Abbildung 3.15 mit in der in den Abbildungen 3.13 - 3.15 verwendeten Farbkodierung. Die Abbildung zeigt, dass der konforme Faktor Ω nur bei \mathcal{I}^+ verschwindet und innerhalb des Gebietes positiv ist. An den vorgeschriebenen MOTS nimmt Ω lokale Minima an. Die marginal gefangenen Flächen sind in dieser Grafik nicht eingezeichnet, sie entsprechen denen in der linken Grafik in 3.15 sowie einer MITS bei \mathcal{I}^+ .

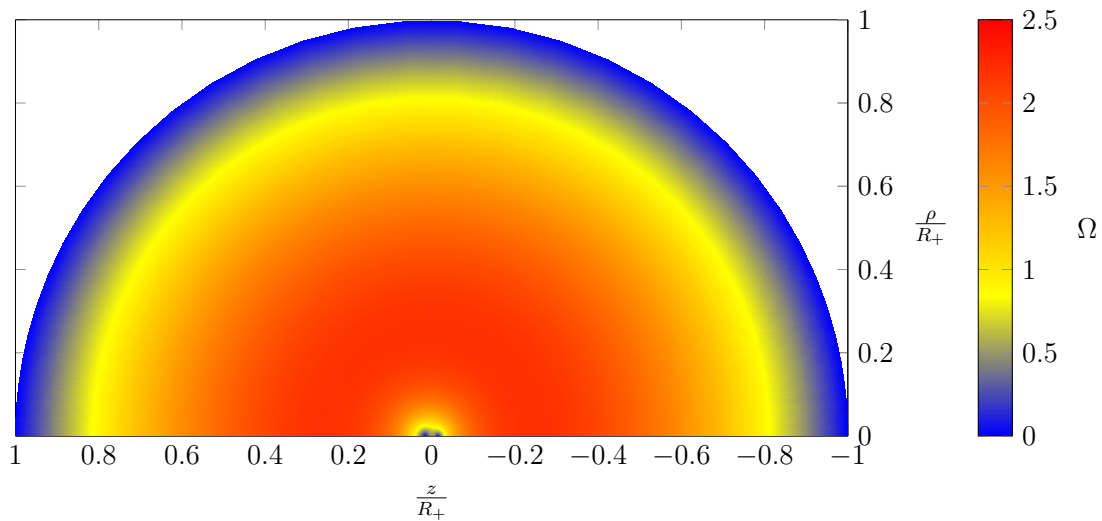


Abbildung 3.16.: Übersicht über das gesamte Gebiet mit den Daten der linken Grafik in Abbildung 3.15. Der konforme Faktor Ω verschwindet bei \mathcal{I}^+ und ist innerhalb des Gebietes positiv. An der Position der Schwarzen Löcher hat Ω lokale Minima, ist jedoch größer Null.

Die in [18] vorgestellten Beispieldaten sind nicht axialsymmetrisch, in dieser Arbeit wurde versucht die axialsymmetrische Projektion der Beispieldaten zu konstruieren, es ist jedoch nicht gelungen eine derartige Lösung zu finden. Wir beobachten, ausgehend von dem oben beschriebenen Verfahren, dass ab einer kritischen Parameterkonfiguration (C_i, S_i) keine Lösung existiert. Bis beliebig nahe zu der kritischen Parameterkonfiguration sind jedoch alle Lösungen regulär, mit rasch abfallenden Chebyshev-Koeffizienten. Als Ursache für dieses Verhalten vermuten wir eine nicht eindeutige Beziehung zwischen vorgegebenen Parametern und der Lösung ϕ .

Insbesondere kann zu einem beliebigem vorgegebenen Parameter p ein daraus abgeleiteter Wert \hat{p} existieren für den wiederum Lösungen existieren. Abbildung 3.17 skizziert ein solches Verhalten. Die durchgezogene und gestrichelte Linie beschreibt Lösungen in Abhängigkeit des vorgegebenen Parameters p . Bis zu einem kritischen Parameter p_k können auf beiden Ästen Lösungen gefunden werden, ein Wechsel der Äste ist jedoch nicht möglich. Der zu beobachtende Effekt wäre, dass das Newton-Raphson-Verfahren nicht konvergiert obwohl alle Lösungen für $p < p_k$ vollkommen regulär sind. Wenn statt des Parameters p der daraus abgeleitete Parameter \hat{p} vorgeschrieben wird, kann das Verfahren für alle \hat{p} Lösungen finden.

Die für die Rekonstruktion der in [18] vorgestellten Daten notwendigen abgeleiteten Parameter wurden bisher von uns noch nicht gefunden. Die Analyse dieses Verhaltens und die Suche nach alternativen Parametern bedarf weiterer Untersuchungen um den vollständigen Parameterraum abdecken zu können.

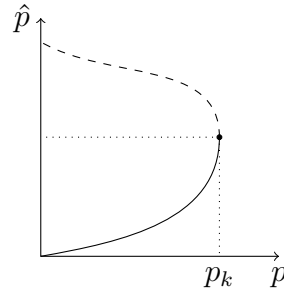


Abbildung 3.17.: Folge von Lösungen in Abhängigkeit eines vorgegebenen Parameters p .

Auf jedem der beiden Äste können Lösungen bis zum kritischen Parameter p_k gewonnen werden, ein Wechsel der Äste ist jedoch nicht möglich.

Die zur Abschätzung der Störstrahlung eingeführte Größe \mathfrak{M}_{BC} variiert für die in Tabelle 3.1 vorgestellten Anfangsdaten stark. Für Daten mit einem gemeinsamen Horizont ist (3.82) $\mathfrak{M}_{BC} = 2$. Bei dieser Konfiguration handelt es sich um ein einzelnes sehr stark gestörtes Schwarzes Loch. Da hier Binärsysteme konstruiert werden sollen, kann diese Art von Daten verworfen werden. Für getrennte scheinbare Horizonte, d. h. zwei Schwarze Löcher, ergibt sich aus den Daten in Abbildung 3.15 $\mathfrak{M}_{BC} = 0.23$. Für die Binärdaten in den Abbildungen 3.11, 3.13 und 3.13 ist \mathfrak{M}_{BC} um bis zu einem Faktor fünf höher. Diese Werte sind größer als die, durch die gravitative Bindungsenergie und die fehlende Eindeutigkeit der Massendefinition erwarteten Effekte. Insbesondere zeigt eine Vergrößerung des Abstandes keine wesentliche Änderung von \mathfrak{M}_{BC} . Daraus schließen wir, dass diese Daten in erheblichem Maß Störstrahlung enthalten.

Für eine Evolution dieser Daten ist es notwendig Schwarze Löcher mit großem physikalischem Abstand voneinander zu konstruieren um ein Auslaufen der Störstrahlung vor der Kollision zu ermöglichen. Die von BUCHMAN et al. [18] konstruierten Daten wurden exemplarisch in [58] ausgewertet, dort wurden, für nicht axialsymmetrische Konfigurationen, Anfangsdaten mit $\mathfrak{M}_{BC} = 0.23$ gefunden.³ Auch hier deutet der große Wert von \mathfrak{M}_{BC}

³In [58] wird statt der Christodoulou-Masse (3.80) die irreduzible Masse (3.81) angegeben, \mathfrak{M}_{BC} wurde deswegen mit dieser und der Bondi-Masse berechnet.

auf einen hohen Anteil an Störstrahlung hin. Im Vergleich zu den auf Cauchy-Blättern konstruierten Anfangsdaten enthält das Binärsystem auf hyperboloidalen Blättern sehr viel Störstrahlung. Die Vermutung liegt nahe, dass auf solchen Blättern die hier verwendeten Forderungen nach konstanter mittlerer Krümmung und konformer Flachheit der Anfangsdaten zu restriktiv sind. Die Suche nach nicht konform flachen Anfangsdaten auf APMC-Blättern bedarf weiterer Forschung.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden APMC-Blätter für eine Überlagerung zweier Kerr-Schild-Metriken konstruiert. Die Koeffizientenfunktionen der Zwangsbedingungen wiesen in dieser Blätterung einen sehr langsamen spektralen Abfall der zugehörigen Chebyshev-Koeffizienten auf, aus diesem Grund wurde diese Blätterung verworfen.

4. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden zwei Pfade verfolgt, zunächst die Einführung und Diskussion von APMC-Blättern. Die für die CMC-Blätterung bewiesene Regularitätsbedingung wurde auf die APMC-Blätterung übertragen und ihre Gültigkeit vermutet. Darauf aufbauend wurden Anfangsdaten für gestörte Kerrsche Schwarze Löcher konstruiert. Die numerische Auswertung der Konvergenz der konstruierten Anfangsdaten unterstützt die Vermutung der Gültigkeit der Regularitätsbedingung. Insbesondere wurde nachgewiesen, dass eine Verletzung der Regularitätsbedingung irreguläre Lösungen erzeugt. Eine Analyse dieser Daten offenbarte eine vielfältige Struktur marginal gefangener Flächen. Insbesondere konnten anhand der Untersuchung marginal inwärts gefangener Flächen Anfangsdaten, die Weiße Löcher beschreiben, identifiziert werden. Für astrophysikalische Untersuchungen kann diese Klasse von Anfangsdaten verworfen werden, sie sind jedoch für eine Stabilitätsanalyse der Kerr-Lösung von Interesse. Die Analyse der marginal auswärts gefangenen Flächen zeigte bei hinreichend großer Störung die Ausbildung eines neuen scheinbaren Horizontes innerhalb des Gebietes.

Des Weiteren wurden die physikalischen Eigenschaften der gestörten Objekte untersucht. Ein Ergebnis der Untersuchung ist die Vermutung, dass sich für starke Störungen die Lösungen wieder der ungestörten Lösung annähern. Eine Bestätigung dieser Vermutung bedarf weiterer Untersuchungen. Mit dem über eine Multipolanalyse des scheinbaren Horizontes gewonnenem Drehimpuls und der Bondi-Masse wurde die Dain-Bondi-Zahl (2.106) vorgeschlagen, eine neue aus der bekannten Penrose-Ungleichung abgeleitete Ungleichung für Schwarze Löcher auf hyperboloidalen Blättern.

Auf der anderen Seite wurde im Rahmen der CMC-Blätterung diese auf die Kerr-Newman-Familie Schwarzer Löcher erweitert. Die Motivation für die Konstruktion von CMC-Blättern für die Kerr-Newman-Familie waren hauptsächlich die vorhandenen Regulari-

tätsbeweise für die Lösungen der Zwangsbedingungen. Im Rahmen dieser Arbeit konnten unter anderem nicht sphärisch symmetrische CMC-Blätter für die Schwarzschildlösung konstruiert werden. Der Algorithmus ermöglicht in wenigen Schritten die Konstruktion der CMC-Blätter für extremale Kerr-Newman Schwarze Löcher. Die erzeugten CMC-Blätter bilden den Ausgangspunkt für die Konstruktion von Anfangsdaten für die Kerr-Newman-Familie.

Des Weiteren wurden, ebenfalls auf CMC-Blättern, Anfangsdaten für ein axialsymmetrisches Binärsystem konstruiert. Diese Daten enthalten zwei entlang der z -Achse aufgereihete Schwarze Löcher. Die in diesen Anfangsdaten enthaltenen marginal gefangene Flächen wurden untersucht, und Anfangsdaten mit Weißen Löchern verworfen. Die Untersuchung der physikalischen Parameter der einzelnen Schwarzen Löcher und des gesamten Blattes legt die Vermutung nahe, dass diese Daten in hohem Maße Störstrahlung enthalten. Die Suche nach Methoden zur Konstruktion von Anfangsdaten für Binärsysteme auf hyperboloidaler Blätterung mit geringer Störstrahlung ist notwendig um diese Daten effektiv evolvieren zu können. Ein vielversprechender Ansatz ist es nicht konform Flache Daten zu konstruieren, in der Erwartung dass dies die Störstrahlung reduziert. Ein weiterer Schritt ist der Verzicht auf Bedingungen an die mittlere Krümmung, dies erfordert jedoch eine weitere Analyse der Regularitätsbedingungen.

Für eine zukünftige Zeitentwicklung können die Feldgleichungen in einer Welleneichung (wave gauge) formuliert werden, wie dies z. B. in [114] vorgeschlagen wird. Mittels des in [19] beschriebenen Algorithmus ist eine vollständig pseudospektrale Zeitentwicklung der Daten möglich. Es wird gegenwärtig daran gearbeitet in diesen Algorithmus die Einsteinschen Feldgleichungen zu implementieren [115]. Dies verspricht die Möglichkeit hochpräziser Lösungen der Feldgleichungen und würde eine hochgenaue Analyse der zeitlichen Entwicklung physikalisch interessanter Größen und Effekte erlauben.

5. Literatur

- [1] A. Einstein. „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 891.
- [2] A. Einstein. „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 778-786.* (1915), S. 778–786.
- [3] R. A. Hulse und J. H. Taylor. „Discovery of a pulsar in a binary system“. In: *Astrophys. J.* 195 (1975), S. L51–L53. DOI: [10.1086/181708](https://doi.org/10.1086/181708).
- [4] Matthew Pitkin u. a. „Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space)“. In: *Living Reviews in Relativity* 14.5 (2011).
- [5] Bernd Bruegmann u. a. „Calibration of Moving Puncture Simulations“. In: *Phys. Rev. D* 77 (2008), S. 024027. DOI: [10.1103/PhysRevD.77.024027](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.024027). arXiv: [gr-qc/0610128](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0610128) [[gr-qc](#)].
- [6] Jeffrey Winicour. „Characteristic Evolution and Matching“. In: *Living Reviews in Relativity* 15.2 (2012). DOI: [10.12942/lrr-2012-2](https://doi.org/10.12942/lrr-2012-2).
- [7] Jörg Frauendiener. „Conformal infinity“. In: *Living Rev. Rel.* 3 (2000), S. 4.
- [8] H. Bondi, M.G.J. van der Burg und A.W.K. Metzner. „Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems“. In: *Proc. Roy. Soc. Lond.* A269 (1962), S. 21–52.
- [9] J.M. Stewart. „Numerical Relativity III. The Bondi Mass Revisited“. In: *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 424 (1989), S. 211–222. DOI: [10.1098/rspa.1989.0076](https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0076).
- [10] Helmut Friedrich. „Cauchy problems for the conformal vacuum field equations in general relativity“. English. In: *Communications in Mathematical Physics* 91 (4 1983), S. 445–472. ISSN: 0010-3616. DOI: [10.1007/BF01206015](https://doi.org/10.1007/BF01206015).

- [11] Peter Hübner. „From now to timelike infinity on a finite grid“. In: *Class. Quant. Grav.* 18 (2001), S. 1871–1884. DOI: [10.1088/0264-9381/18/10/305](https://doi.org/10.1088/0264-9381/18/10/305). arXiv: [gr-qc/0010069](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0010069) [gr-qc].
- [12] Vincent Moncrief und Oliver Rinne. „Regularity of the Einstein equations at future null infinity“. In: *Classical and Quantum Gravity* 26.12 (2009), S. 125010.
- [13] Oliver Rinne. „An Axisymmetric evolution code for the Einstein equations on hyperboloidal slices“. In: *Class. Quant. Grav.* 27 (2010), S. 035014. DOI: [10.1088/0264-9381/27/3/035014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/3/035014). arXiv: [0910.0139](https://arxiv.org/abs/0910.0139) [gr-qc].
- [14] Lars Andersson, Piotr T. Chruściel und Helmut Friedrich. „On the Regularity of solutions to the Yamabe equation and the existence of smooth hyperboloidal initial data for Einsteins field equations“. In: *Commun.Math.Phys.* 149 (1992), S. 587–612. DOI: [10.1007/BF02096944](https://doi.org/10.1007/BF02096944).
- [15] Lars Andersson und Piotr T. Chruściel. „Hyperboloidal Cauchy data for vacuum Einstein equations and obstructions to smoothness of null infinity“. In: *Phys. Rev. Lett.* 70 (19 Mai 1993), S. 2829–2832. DOI: [10.1103/PhysRevLett.70.2829](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.2829).
- [16] Lars Andersson und Piotr T. Chruściel. „On “hyperboloidal” Cauchy data for vacuum einstein equations and obstructions to smoothness of Scri“. English. In: *Communications in Mathematical Physics* 161 (3 1994), S. 533–568. ISSN: 0010-3616. DOI: [10.1007/BF02101932](https://doi.org/10.1007/BF02101932).
- [17] Jörg Frauendiener. „Calculating initial data for the conformal Einstein equations by pseudo-spectral methods“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 109.1–2 (1998), S. 475–491. ISSN: 0377-0427. DOI: [10.1016/S0377-0427\(99\)00168-5](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00168-5).
- [18] Luisa T. Buchman, Harald P. Pfeiffer und James M. Bardeen. „Black hole initial data on hyperboloidal slices“. In: *Phys.Rev.* D80 (2009), S. 084024. DOI: [10.1103/PhysRevD.80.084024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.084024). arXiv: [0907.3163](https://arxiv.org/abs/0907.3163) [gr-qc].
- [19] Rodrigo Panosso Macedo und Marcus Ansorg. „Axisymmetric fully spectral code for hyperbolic equations“. In: *J. Comput. Phys.* 276 (2014), S. 357–379. DOI: [10.1016/j.jcp.2014.07.040](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.040). arXiv: [1402.7343](https://arxiv.org/abs/1402.7343) [physics.comp-ph].

- [20] C.W. Misner, K.S. Thorne und J.A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman, 1973.
- [21] Robert M Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. ISBN: 9780226870335.
- [22] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004. ISBN: 9780805387322.
- [23] E. Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521830911.
- [24] T.W. Baumgarte und S.L. Shapiro. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9780521514071.
- [25] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. International Series of Monographs on Physics. OUP Oxford, 2012. ISBN: 9780199656158.
- [26] Karl Schwarzschild. „Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* 7 (1916), S. 189–196.
- [27] H. Reissner. „Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie“. In: *Annalen der Physik* 355 (1916), S. 106–120. DOI: [10.1002/andp.19163550905](https://doi.org/10.1002/andp.19163550905).
- [28] G Nordström. „On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory“. In: *Proc. K. Ned. Akad. Wet. B* 20 (1918), S. 1238–45.
- [29] R. P. Kerr. „Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics“. In: *Physical Review Letters* 11 (Sep. 1963), S. 237–238. DOI: [10.1103/PhysRevLett.11.237](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237).
- [30] E. T. Newman u. a. „Metric of a Rotating, Charged Mass“. In: *Journal of Mathematical Physics* 6 (Juni 1965), S. 918–919. DOI: [10.1063/1.1704351](https://doi.org/10.1063/1.1704351).
- [31] E. T. Newman und A. I. Janis. „Note on the Kerr Spinning-Particle Metric“. In: *Journal of Mathematical Physics* 6 (Juni 1965), S. 915–917. DOI: [10.1063/1.1704350](https://doi.org/10.1063/1.1704350).
- [32] A. Friedmann. „Über die Krümmung des Raumes“. In: *Zeitschrift für Physik* 10 (1922), S. 377–386. DOI: [10.1007/BF01332580](https://doi.org/10.1007/BF01332580).

- [33] A. Friedmann. „Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes“. In: *Zeitschrift für Physik* 21 (Dez. 1924), S. 326–332. DOI: [10.1007/BF01328280](https://doi.org/10.1007/BF01328280).
- [34] G. Lemaître. „L’Univers en expansion“. In: *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 53 (1933), S. 51.
- [35] H. P. Robertson. „Kinematics and World-Structure“. In: *Astrophysical Journal* 82 (Nov. 1935), S. 284. DOI: [10.1086/143681](https://doi.org/10.1086/143681).
- [36] A. G. Walker. „On Milne’s Theory of World-Structure“. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s2-42.1 (1937), S. 90–127. DOI: [10.1112/plms/s2-42.1.90](https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.90).
- [37] G. Neugebauer und R. Meinel. „General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions“. In: *Phys. Rev. Lett.* 75 (17 Okt. 1995), S. 3046–3047. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.3046](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3046).
- [38] Y. Fourès-Bruhat. „Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires“. In: *Acta Mathematica* 88.1 (1952), S. 141–225. ISSN: 0001-5962. DOI: [10.1007/BF02392131](https://doi.org/10.1007/BF02392131).
- [39] Philippe G. LeFloch und Yue Ma. „The hyperboloidal foliation method“. In: (2014). arXiv: [1411.4910 \[math.AP\]](https://arxiv.org/abs/1411.4910).
- [40] A. Lichnerowicz. „L’intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps“. In: *J. Math. Pures Appl.* 23 (1944), S. 37–63.
- [41] Yvonne Bruhat. „The cauchy problem“. In: *Gravitation: An Introduction to Current Research*. Hrsg. von L. Witten. New York: Wiley, 1962.
- [42] R. Arnowitt, S. Deser und C. W. Misner. „Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity“. In: *Physical Review* 116 (1959), S. 1322–1330. DOI: [10.1103/PhysRev.116.1322](https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322).
- [43] Olivier Sarbach. „Absorbing boundary conditions for Einstein’s field equations“. In: *J.Phys.Conf.Ser.* 91 (2007), S. 012005. DOI: [10.1088/1742-6596/91/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/91/1/012005). arXiv: [0708.4266 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/0708.4266).
- [44] Mihalis Dafermos und Igor Rodnianski. „A Note on boundary value problems for black hole evolutions“. arXiv:gr-qc/0403034. 2004.

- [45] Anıl Zenginoğlu. „Hyperboloidal foliations and scri-fixing“. In: *Class. Quant. Grav.* 25 (2008), S. 145002. DOI: [10.1088/0264-9381/25/14/145002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/14/145002). arXiv: [0712.4333](https://arxiv.org/abs/0712.4333) [gr-qc].
- [46] István Rácz und Gábor Zolt Tóth. „Numerical investigation of the late-time Kerr tails“. In: *Class. Quant. Grav.* 28 (2011), S. 195003. DOI: [10.1088/0264-9381/28/19/195003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/19/195003). arXiv: [1104.4199](https://arxiv.org/abs/1104.4199) [gr-qc].
- [47] Michael Jasiulek. „Hyperboloidal slices for the wave equation of Kerr-Schild metrics and numerical applications“. In: *Class. Quant. Grav.* 29 (2012), S. 015008. DOI: [10.1088/0264-9381/29/1/015008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/1/015008). arXiv: [1109.2513](https://arxiv.org/abs/1109.2513) [gr-qc].
- [48] Jr. York James W. „Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem“. In: *Phys.Rev.Lett.* 26 (1971), S. 1656–1658. DOI: [10.1103/PhysRevLett.26.1656](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.1656).
- [49] Jr. York James W. „Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation“. In: *Phys.Rev.Lett.* 28 (1972), S. 1082–1085. DOI: [10.1103/PhysRevLett.28.1082](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.1082).
- [50] Jr. York James W. „Conformatlly invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity“. In: *J.Math.Phys.* 14 (1973), S. 456–464. DOI: [10.1063/1.1666338](https://doi.org/10.1063/1.1666338).
- [51] Jr. York James W. „Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation“. In: *Ann.Inst.Henri Poincare* A21 (1974), S. 319–332.
- [52] J. W. York Jr. „Kinematics and dynamics of general relativity“. In: *Sources of Gravitational Radiation*. Hrsg. von L. L. Smarr. 1979, S. 83–126.
- [53] J. W. York Jr. und T. Piran. „The Initial Value Problem and Beyond“. In: *Space-time and Geometry*. Hrsg. von R. A. Matzner und L. C. Shepley. 1982, S. 147.
- [54] Gregory B. Cook. „Initial data for numerical relativity“. In: *Living Rev.Rel.* 3 (2000), S. 5. arXiv: [gr-qc/0007085](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0007085) [gr-qc].
- [55] Jeffrey M. Bowen und Jr. York James W. „Time asymmetric initial data for black holes and black hole collisions“. In: *Phys.Rev.* D21 (1980), S. 2047–2056. DOI: [10.1103/PhysRevD.21.2047](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2047).

- [56] Robert H. Gowdy. „The Compactification of initial data on constant mean curvature time slices in spherically symmetric space-times“. arXiv:gr-qc/0107016. 2001.
- [57] James M. Bardeen, Olivier Sarbach und Luisa T. Buchman. „Tetrad formalism for numerical relativity on conformally compactified constant mean curvature hypersurfaces“. In: *Phys.Rev.* D83 (2011), S. 104045. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.104045](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.104045). arXiv: [1101.5479 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1101.5479).
- [58] James M. Bardeen und Luisa T. Buchman. „Bondi-Sachs Energy-Momentum for the CMC Initial Value Problem“. In: *Phys. Rev.* D85 (2012), S. 064035. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.064035](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.064035). arXiv: [1111.2596 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1111.2596).
- [59] James Isenberg und Jiseong Park. „Asymptotically hyperbolic nonconstant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations“. In: *Class. Quant. Grav.* 14 (1997), A189–A202. DOI: [10.1088/0264-9381/14/1A/016](https://doi.org/10.1088/0264-9381/14/1A/016). arXiv: [gr-qc/9610027 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9610027).
- [60] Romain Gicquaud und Anna Sakovich. „A large class of non constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold“. In: *Commun. Math. Phys.* 310 (2012), S. 705–763. DOI: [10.1007/s00220-012-1420-4](https://doi.org/10.1007/s00220-012-1420-4). arXiv: [1012.2246 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1012.2246).
- [61] James Dilts u. a. „Non-CMC solutions of the Einstein constraint equations on asymptotically Euclidean manifolds“. In: *Class. Quant. Grav.* 31 (2014), S. 065001. DOI: [10.1088/0264-9381/31/6/065001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/31/6/065001). arXiv: [1312.0535 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1312.0535).
- [62] Michael Holst und Caleb Meier. „Non-CMC Solutions to the Einstein Constraint Equations on Asymptotically Euclidean Manifolds with Apparent Horizon Boundaries“. In: *Class. Quant. Grav.* 32.2 (2015), S. 025006. DOI: [10.1088/0264-9381/32/2/025006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/2/025006). arXiv: [1403.4549 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1403.4549).
- [63] Roger Penrose. „Gravitational Collapse and Space-Time Singularities“. In: *Phys. Rev. Lett.* 14 (1965), S. 57.
- [64] José Luis Jaramillo. „An introduction to local black hole horizons in the 3+1 approach to General Relativity“. In: *International Journal of Modern Physics D* 20.11 (2011), S. 2169–2204. DOI: [10.1142/S0218271811020366](https://doi.org/10.1142/S0218271811020366).

- [65] Abhay Ashtekar und Badri Krishnan. „Isolated and dynamical horizons and their applications“. In: *Living Rev. Rel.* 7 (2004), S. 10. DOI: [10.12942/lrr-2004-10](https://doi.org/10.12942/lrr-2004-10). arXiv: [gr-qc/0407042](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0407042) [gr-qc].
- [66] Robert M. Wald und Vivek Iyer. „Trapped surfaces in the Schwarzschild geometry and cosmic censorship“. In: *Phys.Rev.* D44 (1991), S. 3719–3722. DOI: [10.1103/PhysRevD.44.R3719](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.R3719).
- [67] Mijan F. Huq, Matthew W. Choptuik und Richard A. Matzner. „Locating boosted Kerr and Schwarzschild apparent horizons“. In: *Phys. Rev. D* 66 (8 Okt. 2002), S. 084024. DOI: [10.1103/PhysRevD.66.084024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.084024).
- [68] Lars Andersson und Jan Metzger. „The Area of horizons and the trapped region“. In: *Commun.Math.Phys.* 290 (2009), S. 941–972. DOI: [10.1007/s00220-008-0723-y](https://doi.org/10.1007/s00220-008-0723-y). arXiv: [0708.4252](https://arxiv.org/abs/0708.4252) [gr-qc].
- [69] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. ISBN: 9780486141923.
- [70] Philippe Grandclément und Jérôme Novak. „Spectral Methods for Numerical Relativity“. In: *Living Reviews in Relativity* 12.1 (2009). DOI: [10.12942/lrr-2009-1](https://doi.org/10.12942/lrr-2009-1).
- [71] C.W. Clenshaw. *Mathematical Tables*. H.M. Stationery Office, 1962.
- [72] William H. Press u. a. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. Aufl. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN: 0521880688, 9780521880688. URL: <http://www.nr.com>.
- [73] M. Frigo und S.G. Johnson. „The Design and Implementation of FFTW3“. In: *Proceedings of the IEEE* 93.2 (Feb. 2005), S. 216–231. ISSN: 0018-9219. DOI: [10.1109/JPROC.2004.840301](https://doi.org/10.1109/JPROC.2004.840301).
- [74] R. Barrett u. a. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [75] Erik Schnetter. „Finding apparent horizons and other two surfaces of constant expansion“. In: *Class. Quant. Grav.* 20 (2003), S. 4719–4737. DOI: [10.1088/0264-9381/20/22/001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/22/001). arXiv: [gr-qc/0306006](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306006) [gr-qc].

- [76] Jonathan Thornburg. „Event and Apparent Horizon Finders for 3+1 Numerical Relativity“. In: *Living Reviews in Relativity* 10.3 (2007). DOI: [10.12942/lrr-2007-3](https://doi.org/10.12942/lrr-2007-3).
- [77] Jonathan Thornburg. „Finding apparent horizons in numerical relativity“. In: *Phys. Rev. D* 54 (1996), S. 4899–4918. DOI: [10.1103/PhysRevD.54.4899](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.4899). arXiv: [gr-qc/9508014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9508014) [gr-qc].
- [78] David Schinkel, Rodrigo Panosso Macedo und Marcus Ansorg. „Axisymmetric constant mean curvature slices in the Kerr spacetime“. In: *Classical and Quantum Gravity* 31.7 (2014), S. 075017.
- [79] Lars Andersson u. a. „The Time evolution of marginally trapped surfaces“. In: *Class. Quant. Grav.* 26 (2009), S. 085018. DOI: [10.1088/0264-9381/26/8/085018](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/8/085018). arXiv: [0811.4721](https://arxiv.org/abs/0811.4721) [gr-qc].
- [80] Sean A. Hayward. „General laws of black-hole dynamics“. In: *Phys. Rev. D* 49 (12 Juni 1994), S. 6467–6474. DOI: [10.1103/PhysRevD.49.6467](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.6467).
- [81] Nicolas Vasset, Jérôme Novak und José Luis Jaramillo. „Excised black hole space-times: Quasi-local horizon formalism applied to the Kerr example“. In: *Phys. Rev. D* 79 (2009), S. 124010. DOI: [10.1103/PhysRevD.79.124010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.124010). arXiv: [0901.2052](https://arxiv.org/abs/0901.2052) [gr-qc].
- [82] Abhay Ashtekar u. a. „Multipole moments of isolated horizons“. In: *Class. Quant. Grav.* 21 (2004), S. 2549–2570. DOI: [10.1088/0264-9381/21/11/003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/11/003). arXiv: [gr-qc/0401114](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0401114).
- [83] Erik Schnetter, Badri Krishnan und Florian Beyer. „Introduction to Dynamical Horizons in numerical relativity“. In: *Phys. Rev. D* 74 (2006), S. 024028. eprint: [gr-qc/0604015](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0604015).
- [84] José Luis Jaramillo u. a. „Black-hole horizons as probes of black-hole dynamics. I. Post-merger recoil in head-on collisions“. In: *Phys. Rev. D* 85 (8 Apr. 2012), S. 084030. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.084030](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.084030). arXiv: [1108.0060](https://arxiv.org/abs/1108.0060) [gr-qc].
- [85] S. W. Hawking. „Gravitational Radiation in an Expanding Universe“. In: *Journal of Mathematical Physics* 9.4 (1968), S. 598–604. DOI: [http://dx.doi.org/10.1063/1.1664615](https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1063/1.1664615).

- [86] László B. Szabados. „Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in GR: A Review Article“. In: *Living Rev. Relativ.* 7 (2004), S. 4.
- [87] J. L. Jaramillo und E.ourgoulhon. „Mass and Angular Momentum in General Relativity“. In: *Fundam.Theor.Phys.* 162 (2011), S. 87–124. arXiv: [1001.5429 \[gr-qc\]](#).
- [88] Oliver Rinne und Vincent Moncrief. „Hyperboloidal Einstein-matter evolution and tails for scalar and Yang-Mills fields“. In: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013), S. 095009. DOI: [10.1088/0264-9381/30/9/095009](#). arXiv: [1301.6174 \[gr-qc\]](#).
- [89] J. L. Jaramillo, N. Vasset und M. Ansorg. „A numerical study of Penrose-like inequalities in a family of axially symmetric initial data“. In: *EAS Publications Series*. Hrsg. von A. Oscoz, E. Mediavilla und M. Serra-Ricart. Bd. 30. EAS Publications Series. 2008, S. 257–260. DOI: [10.1051/eas:0830039](#). arXiv: [0712.1741 \[gr-qc\]](#).
- [90] R. Penrose. „Naked Singularities“. In: *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 224 (1973), S. 125.
- [91] Sergio Dain, Carlos Lousto und Ryoji Takahashi. „New conformally flat initial data for spinning black holes“. In: *Physical Review D* 65.10 (Mai 2002), S. 104038. ISSN: 0556-2821. DOI: [10.1103/PhysRevD.65.104038](#).
- [92] David Schinkel, Marcus Ansorg und Rodrigo Panosso Macedo. „Initial data for perturbed Kerr black holes on hyperboloidal slices“. In: *Class. Quant. Grav.* 31 (2014), S. 165001. DOI: [10.1088/0264-9381/31/16/165001](#). arXiv: [1301.6984 \[gr-qc\]](#).
- [93] Sascha Husa u. a. „Hyperboloidal data and evolution“. In: *AIP Conf.Proc.* 841 (2006), S. 306–313. DOI: [10.1063/1.2218186](#). arXiv: [gr-qc/0512033 \[gr-qc\]](#).
- [94] Geoffrey Lovelace u. a. „Binary-black-hole initial data with nearly extremal spins“. In: *Phys. Rev. D* 78 (8 Okt. 2008), S. 084017. DOI: [10.1103/PhysRevD.78.084017](#).
- [95] Alcides Garat und Richard H. Price. „Nonexistence of conformally flat slices of the Kerr space-time“. In: *Phys.Rev.* D61 (2000), S. 124011. DOI: [10.1103/PhysRevD.61.124011](#). arXiv: [gr-qc/0002013 \[gr-qc\]](#).

- [96] Juan Antonio Valiente Kroon. „On the nonexistence of conformally flat slices in the Kerr and other stationary space-times“. In: *Phys.Rev.Lett.* 92 (2004), S. 041101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.041101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.041101). arXiv: [gr-qc/0310048 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0310048).
- [97] Juan Antonio Valiente Kroon. „Asymptotic expansions of the Cotton-York tensor on slices of stationary space-times“. In: *Class. Quant. Grav.* 21 (2004), S. 3237–3250. DOI: [10.1088/0264-9381/21/13/009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/13/009). arXiv: [gr-qc/0402033 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0402033).
- [98] Juan Valiente Kroon. private communication. 2015.
- [99] Patrick Tuite und Niall Ó Murchadha. „Constant Mean Curvature Slices of the Reissner-Nordström Spacetime“. arXiv:1307.4657. Juli 2013.
- [100] Dieter R. Brill, John M. Cavallo und James A. Isenberg. „K-surfaces in the Schwarzschild space-time and the construction of lattice cosmologies“. In: *Journal of Mathematical Physics* 21.12 (1980), S. 2789–2796. DOI: [10.1063/1.524400](https://doi.org/10.1063/1.524400).
- [101] Edward Malec und Niall Ó Murchadha. „General spherically symmetric constant mean curvature foliations of the Schwarzschild solution“. In: *Phys. Rev. D* 80 (2 Juli 2009), S. 024017. DOI: [10.1103/PhysRevD.80.024017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.024017).
- [102] Adrian P. Gentle u. a. „Constant crunch coordinates for black hole simulations“. In: *Phys.Rev.* D63 (2001), S. 064024. DOI: [10.1103/PhysRevD.63.064024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.064024). arXiv: [gr-qc/0005113 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0005113).
- [103] Anıl Zenginoğlu. „A Hyperboloidal study of tail decay rates for scalar and Yang-Mills fields“. In: *Class. Quant. Grav.* 25 (2008), S. 175013. DOI: [10.1088/0264-9381/25/17/175013](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/17/175013). arXiv: [0803.2018 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/0803.2018).
- [104] Anıl Zenginoğlu, Darío Núñez und Sascha Husa. „Gravitational perturbations of Schwarzschild spacetime at null infinity and the hyperboloidal initial value problem“. In: *Class. Quant. Grav.* 26 (2009), S. 035009. DOI: [10.1088/0264-9381/26/3/035009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/3/035009). arXiv: [0810.1929 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/0810.1929).
- [105] Enno Harms, Sebastiano Bernuzzi und Bernd Brügmann. „Numerical solution of the 2+1 Teukolsky equation on a hyperboloidal and horizon penetrating foliation of Kerr and application to late-time decays“. In: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013), S. 115013. DOI: [10.1088/0264-9381/30/11/115013](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/11/115013). arXiv: [1301.1591 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1301.1591).

- [106] Jonathan Thornburg. „Coordinates and boundary conditions for the general relativistic initial data problem“. In: *Classical and Quantum Gravity* 4.5 (1987), S. 1119.
- [107] Edward Seidel und Wai-Mo Suen. „Towards a singularity-proof scheme in numerical relativity“. In: *Phys. Rev. Lett.* 69 (13 Sep. 1992), S. 1845–1848. DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.1845](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1845).
- [108] Edward Malec und Niall O Murchadha. „Constant mean curvature slices in the extended Schwarzschild solution and collapse of the lapse. Part I“. In: *Phys. Rev. D* 68 (2003), S. 124019. DOI: [10.1103/PhysRevD.68.124019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.124019). arXiv: [gr-qc/0307046](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0307046) [gr-qc].
- [109] Marcus Ansorg. „A Double-domain spectral method for black hole excision data“. In: *Phys. Rev. D* 72 (2005), S. 024018. DOI: [10.1103/PhysRevD.72.024018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.024018). arXiv: [gr-qc/0505059](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0505059) [gr-qc].
- [110] Marcus Ansorg. „Multi-Domain Spectral Method for Initial Data of Arbitrary Binaries in General Relativity“. In: *Class. Quant. Grav.* 24 (2007), S1–S14. DOI: [10.1088/0264-9381/24/12/S01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/12/S01). arXiv: [gr-qc/0612081](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0612081) [gr-qc].
- [111] G.B. Arfken und H.J. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier Acad. Press, 2008. ISBN: 9780120598762.
- [112] P.H. Moon und D.E. Spencer. *Field theory handbook: including coordinate systems, differential equations and their solutions*. Springer, 1971.
- [113] Demetrios Christodoulou. „Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics“. In: *Phys. Rev. Lett.* 25 (22 Nov. 1970), S. 1596–1597.
- [114] Anıl Zenginoğlu. „Hyperboloidal evolution with the Einstein equations“. In: *Class. Quant. Grav.* 25 (2008), S. 195025. DOI: [10.1088/0264-9381/25/19/195025](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/19/195025). arXiv: [0808.0810](https://arxiv.org/abs/0808.0810) [gr-qc].
- [115] Rodrigo Panosso Macedo und Marcus Ansorg. private communication. 2015.

A. Danksagung

Allen voran möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Marcus Ansorg danken, der mir in allen Phasen meiner Doktorarbeit mit Rat und Tat zur Seite stand.

Ganz besonderen Dank gilt auch Dr. Rodrigo Panosso Macedo für die gute und vor allem hilfreiche Zusammenarbeit in den letzten Jahren.

Mithilfe der Finanzierung durch den SFB/TR 7, das Graduiertenkolleg 1523 und die Universität Jena war es mir im Rahmen meiner Arbeit möglich, an zahlreichen interessanten und lehrreichen Konferenzen und Workshops teilzunehmen. Vielen Dank dafür!

Nicht zuletzt möchte ich meinen Freunden und Kommilitonen meinen Dank aussprechen, für die wunderbare Zeit in Jena, die immerwährende Unterstützung, die Zusprache und natürlich für das unermüdliche Korrekturlesen meiner Arbeit. Hierfür danke ich insbesondere den aufmerksamen und kritischen Lesern: Alexander Blinne, Tom Dörffel, Michael Kalisch und Julian Leiber.

B. Lebenslauf

Ausbildung

- 2006** Studium der Physik an der Universität Jena
- 2008–2009** Auslandssemester an der Universidad Autónoma de Barcelona
- 2012** Diplom in Physik an der Universität Jena
- 2012** Doktorand der Physik an der Universität Jena

Praktika

- 10/2010 – 02/2011** Siemens (Bangalore, Indien) - Entwicklungsabteilung
- 07/2011 – 08/2011** Universität Cardiff - Gravitationsphysik

Soziales Engagement

- 10/2009 – 09/2011** Mitglied des Studierendenrates der Universität Jena
- 10/2009 – 09/2010** Vorstand des Studierendenrates der Universität Jena
- 10/2010 – 09/2011** Wahlvorstand der Studierendenschaft der Universität Jena
- 10/2011 – 09/2012** Mitglied des Fakultätsrates der Physikalisch-Astronomische Fakultät der Universität Jena
- seit 2011** Abteilungsleiter der Abteilung Fechten des Universitätssportverein Jena e.V.

Lehrtätigkeit

- WS 2009/2010** Übungsleiter „Mathematische Methoden der Physik“
- WS 2011/2012** Übungsleiter „Mathematische Methoden der Physik“
- WS 2012/2013** Übungsleiter „Elektrodynamik für Lehramtsstudenten“
- SS 2015** Übungsleiter „Elektrodynamik für Lehramtsstudenten“

Veröffentlichungen

2014 Axisymmetric constant mean curvature slices in the Kerr space-time

David Schinkel, Rodrigo Panosso Macedo, Marcus Ansorg

Class.Quant.Grav. 31 (2014) 075017

2014 Initial data for perturbed Kerr black holes on hyperboloidal slices

David Schinkel, Rodrigo Panosso Macedo, Marcus Ansorg

Class.Quant.Grav. 31 (2014) 165001

Patente

2011 system and method for analyzing an substance

V. A. Venkatesan, V. Kalambur, D. Schinkel

Kalkutta 1206/KOL/2011

Patentanmeldung in der Bearbeitungsphase durch das Patentamt Kalkutta

Konferenzen, Workshops & Schulen

06/2004 Nobelpreisträgertreffen (Lindau)

03/2008 Summer School on Gravitational Physics (AEI Potsdam)

10/2012 Workshop on numerical and mathematical relativity (Oppurg)

10/2012 Konferenz des Sonderforschungsbereiches SFB/TR7 Gravitationswellenastronomie (Garching)

02/2013 3. Central European Relativity Seminar (Potsdam)

02/2013 Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (Jena)

11/2013 Initial Data and Evolution Problems in General Relativity (Berkeley)

02/2014 Konferenz des Sonderforschungsbereiches SFB/TR7 Gravitationswellenastronomie (Tübingen)

07/2014 Workshop: Programming of Heterogeneous Systems in Physics (Jena)

12/2014 Workshop: Abschluss des SFB/TR7 Gravitationswellenastronomie (Jena)

12/2015 32nd Winter School in Theoretical Physics (Jerusalem)

02/2015 5. Central European Relativity Seminar (Budapest)

03/2015 Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (Berlin)

C. Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Die nachstehend aufgeführten Personen haben mich bei der Auswahl und Auswertung unentgeltlich unterstützt.

- Prof. Dr. Marcus Ansorg
- Dr. Rodrigo Panosso Macedo

Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, dass ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, 7. Januar 2016

David Schinkel